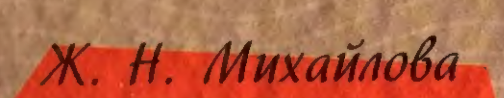
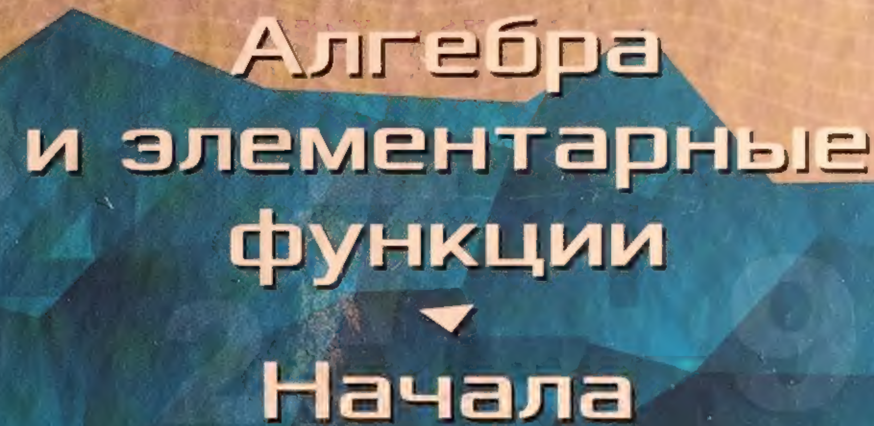
книга-репетитор

средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа средняя



Ж. Н. Михайлова

Алгоритмы — ключ к решению задач



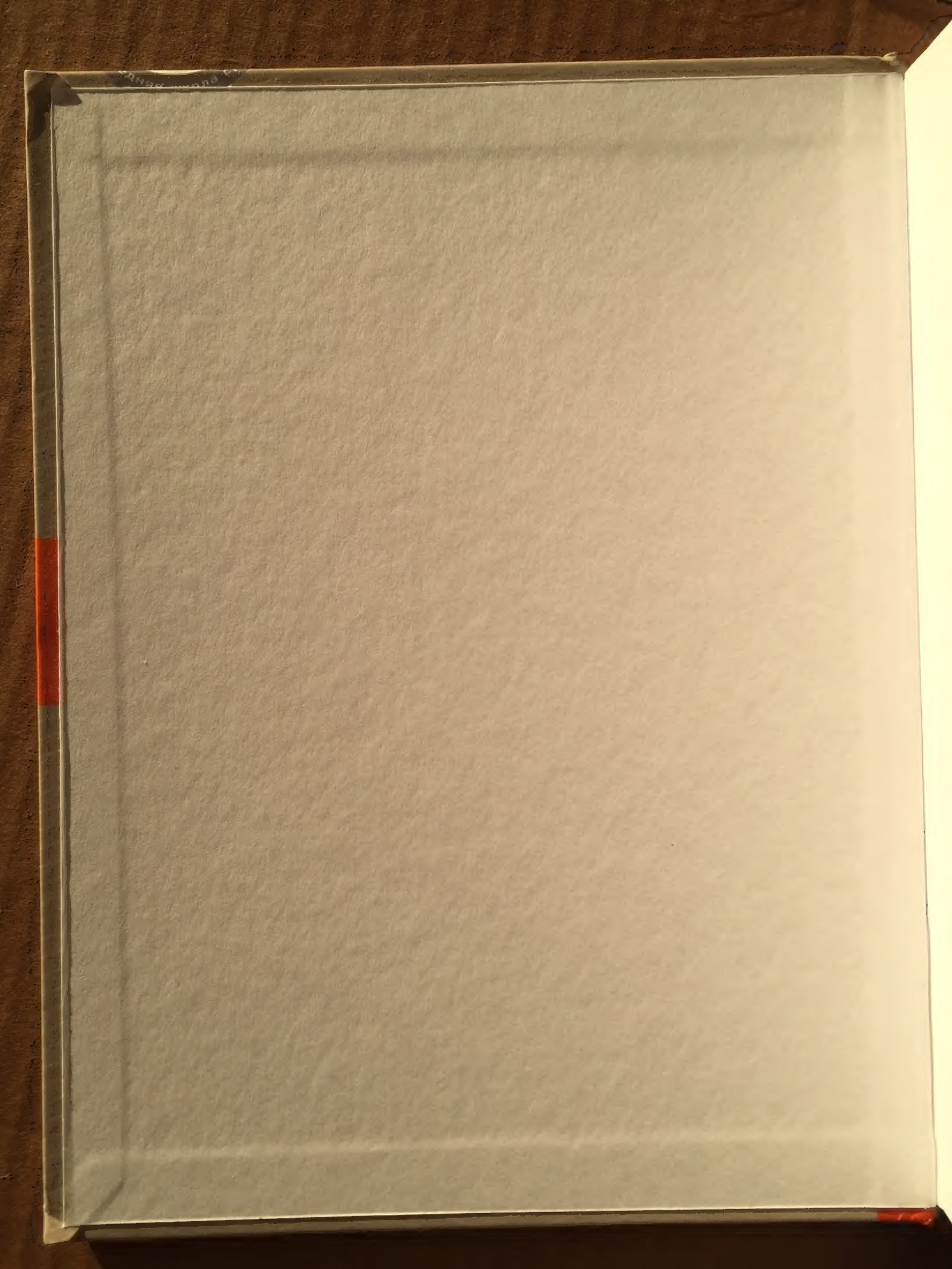
Алгебра и элементарные функции

Начала математического анализа

10–11 классы

средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа

Литера



книга-репетитор

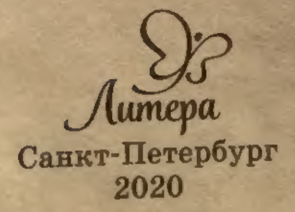
Ж. Н. Михайлова

Алгоритмы — ключ к решению задач

Алгебра и элементарные функции

Начала математического анализа

10–11 классы



Санкт-Петербург
2020

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1я72
М69

Рецензенты:

Е. Ю. Лукичева — канд. пед. наук, заведующая кафедрой физико-математического образования СПб АППО

А. С. Фадеева — учитель математики школы № 332 Санкт-Петербурга

Михайлова Ж. Н.

М69 Алгоритмы — ключ к решению задач: Алгебра и элементарные функции. Начала математического анализа. 10—11 классы. — СПб.: Издательский Дом «Литера», 2020. — 576 с.: ил. — (Серия «Средняя школа»).

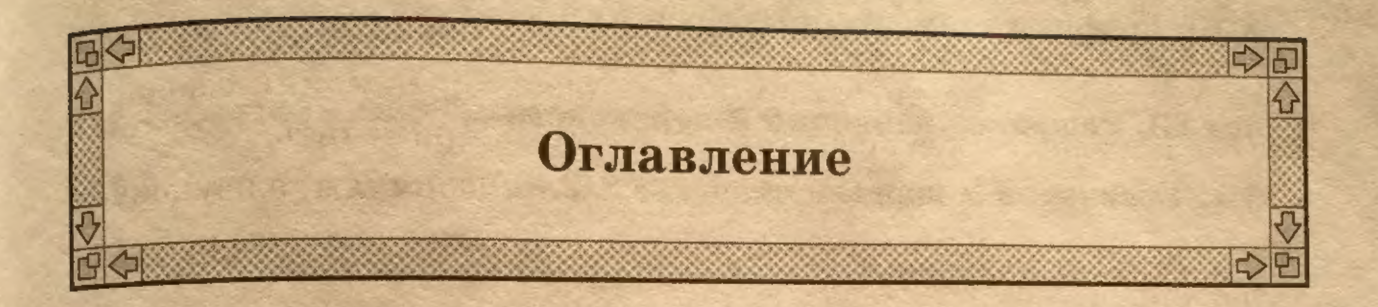
ISBN 978-5-407-00996-2

Книга необходима при изучении всех базовых математических понятий, с которыми учащиеся знакомятся впервые и которые можно изучить только через алгоритмы. В ней приведены определения понятий, методика работы с формулами для лучшего их запоминания и применения, рациональная методика записи решений по предложенным алгоритмам типовых уравнений, их систем и неравенств по всем разделам школьного курса алгебры, тригонометрии и начал математического анализа с подробным изучением функций. Кроме того, в книге содержатся образцы выполнения заданий ЕГЭ.

Книга будет удобна при дистанционном обучении математике учащихся 10—11-го классов общеобразовательных школ.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-407-00996-2



Оглавление

ЧАСТЬ I

ЧАСТЬ II

СПИСОК АЛГОРИТМОВ

Часть I

СПИСОК АЛГОРИТМОВ

Часть II

Дорогие друзья!

Книга, которую вы держите в руках, научит вас самостоятельно решать примеры и задачи по алгебре и началам математического анализа, если вы выполните мои советы:

1. Прочитайте по школьному учебнику нужное вам определение понятия и постарайтесь разобрать его суть с помощью этой книги.

2. Найдите в книге нужный алгоритм решения для данного задания по данной теме и выполните его по шагам; если какая-либо операция уже выполнена, то перейдите к следующему шагу, пока не придете к ответу.

В книге приведены **направляющие**, т. е. указывающие порядок выполнения действий, алгоритмы, поэтому предполагается достаточно свободное их применение внутри каждого шага.

Напомню, что «***алгоритм*** *— это совокупность четко определенных правил для решения задачи за конечное число шагов или последовательность выполнения действий при решении задачи*». Вы должны овладеть алгоритмами решений **типовых** задач. Если в применении алгоритма возникнут трудности, то сначала изучите примеры, решенные с помощью этого алгоритма, а затем выполняйте задания, применяя алгоритм. Примеры надо решать по правилу, которое задает алгоритм, а не по образцу решенного примера.

Алгоритмы развивают логику, являются основой составления программ в работе с компьютером; алгоритмы используются в любой сфере деятельности человека.

3. Если при решении примера необходимо применить формулу, а вы затрудняетесь в ее выборе, то найдите таблицу формул по данной теме (в конце книги), определите последнее (как правило) действие в примере и по внешнему виду примера подберите формулу. Выбрав формулу решения, **обязательно** запишите ее рядом

с примером справа. Отметьте в примере элементы из формулы и примените формулу к решению данного примера (в книге вы увидите образцы решений).

Формула — это закон решения примера в сжатом виде. Вы только применяете формулу, а решает пример формула. При прописывании формулы вы получаете сигнал в мозг — как решать. Главное — не зубрить формулы, а уметь их понимать и применять! Учить формулы не надо, их «выучит» рука. Прописывание формул раскрепощает ваш ум, вы работаете без напряжения.

4. Помните, что необходимо математически грамотно оформлять свои решения: уметь записывать кратко условие задания и что требуется найти, выделять главную мысль, а вспомогательные решения, формулы и необходимые теоретические пояснения удобно записывать справа за вертикальной чертой, чтобы вы могли воспользоваться своим решением при повторении и грамотно оформить работу на экзаменах.

Умение объяснять свои действия в математике поможет и в жизни мотивировать свои поступки. Условные обозначения в книге такие же, как в школьном учебнике.

5. Материал в книге расположен по темам, поэтому вы легко найдете нужный вам раздел по оглавлению. В книге даны решения некоторых экзаменационных материалов (ЭМ), примеры решений заданий, предлагавшихся на Едином государственном экзамене (ЕГЭ), а также задания для самоконтроля с ответами.

Надеюсь, дорогие друзья, что с помощью моей методики вы усвоите необходимые алгоритмы решений, научитесь отыскивать и применять формулы и сможете самостоятельно, без репетитора, подготовиться к экзаменам по алгебре и началам математического анализа не только в школе, но и при поступлении в вузы.

С любовью к вам
Автор

ЧАСТЬ I

Глава I
Расширение понятия о числе

Числа, изучаемые в школьном курсе

N — множество натуральных чисел: 1, 2, 3, ...

Z — множество целых чисел: 0; ±1; ±2; ...

Q — множество рациональных чисел: дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$; любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Например: а) $\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}(6)$; б) $5 = \frac{5}{1} = 5{,}000... = 5{,}(0)$;

в) $-1 = \frac{-1}{1} = -1{,}(0)$

Иррациональные числа: бесконечные десятичные непериодические дроби (π, $\sqrt{2}$, e, ...); их нельзя записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

R — множество действительных чисел: бесконечные десятичные дроби (периодические дроби — рациональные числа Q и непериодические дроби — иррациональные числа).

Комплексные числа:

$z = a + bi$ — комплексное число, где a и b — действительные числа, bi — мнимая часть числа ($i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$).

Например: $z = 2 - i$, $z = 0 + 0i$, $z = 5i$ — комплексные числа

Рис. 1

Схема соотношения между множествами чисел дана на рисунке 1.

Действия над действительными числами

Основные действия над действительными числами

1. $\underbrace{a+b}_{\text{действие сложения}}=c \leftarrow$ сумма (результат)

2. $\underbrace{a\cdot b}_{\text{действие умножения}}=c \leftarrow$ произведение

3. $\underbrace{a^n}_{\text{действие возведения в степень}}=c \leftarrow$ степень

Действия над действительными числами, обратные к основным действиям

1. $\underbrace{a-b}_{\text{действие вычитания}}=c \leftarrow$ разность

2. $\underbrace{a:b}_{\text{действие деления}}=c \leftarrow$ частное $(b \neq 0)$

3. $\underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\text{действие извлечения корня}}=b \leftarrow$ корень, $n \in N$

4. $\underbrace{\log_a b}_{\text{действие логарифмирования}}=c \leftarrow$ логарифм $(b>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

§ 1 Степень числа

Степень положительного числа a с действительным показателем r записывается в виде равенства:

показатель степени $(r \in R) \rightarrow a^r = b \leftarrow$ *степень* $(b>0)$

$\uparrow$

$(a>0)$ — *основание степени*

Степень числа a $(a>0)$ *может быть записана по-разному в зависимости от показателя* r (см. с. 7).

№ п/п	Показатель степени r	Степень a^r, $a > 0$	Примеры
1	$r = n$, $n \in N$, т. е. $n = 1, 2, 3, \ldots$	$a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$	$(0,1)^1 = 0,1$; $100^1 = 100$ $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $(0,3)^2 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
2	$r = 0$	$a^0 = 1$	$(\sqrt{2})^0 = 1$; $\pi^0 = 1$
3	$r = -1$ $r = -n$, $n \in N$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$; $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$
4	$r = \frac{m}{n}$ $\begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	$7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$ $\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$
5	$r = -\frac{m}{n}$ $\begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix}$	$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$4^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = 2^{-\frac{3}{2}}$ $7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$
6	$r = \alpha$, α — иррациональное число	$a^{\alpha-} < a^{\alpha} < a^{\alpha+}$, $a > 1$ $a^{\alpha+} < a^{\alpha} < a^{\alpha-}$ $0 < a < 1$	$3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,42} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1,41}$
	α^- — рациональное приближение α с недостатком α^+ — рациональное приближение α с избытком		

П о л е з н ы й   с о в е т. Помните, что можно читать формулы (1—6) как слева направо, так и справа налево.

Свойства степеней с действительными показателями ($a>0,\ b>0,\ c>0,\ r,\ p \in R$)

1. $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$
2. $a^p : a^r = a^{p-r}$
3. $(a^p)^r = a^{p \cdot r}$
4. $(a \cdot b \cdot c)^r = a^r \cdot b^r \cdot c^r$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$, $b \neq 0$
6. $a^{p+r} = a^p \cdot a^r$
7. $a^{p-r} = a^p : a^r$
8. $a^{p \cdot r} = (a^p)^r = (a^r)^p$
9. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
10. $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$, $b \neq 0$
11. Если $0 < a < b$ и $r > 0$, то $a^r < b^r$; если $r < 0$, то $a^r > b^r$
12. Если $a > 1$ и $r < p$, то $a^r < a^p$; если $0 < a < 1$, то $a^r > a^p$
13. Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^r = a^p$, то $r = p$

Замечание. Формулы (6—10) — это формулы (1—5), записанные справа налево соответственно; с ними удобнее работать, когда они прописаны.

Алгоритм 1 Действия со степенями

1. Если пример состоит из одного действия, то запишите справа нужную для решения формулу и решите по ней пример.

   Например: $7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7 \mid a^r \cdot a^p = a^{r+p}$

2. Если пример состоит из нескольких действий, то определите порядок действий и начинайте выполнять решение с последней ступени:
   а) выполните действие возведения в степень произведения, применив формулу $(a \cdot b \cdot c)^r = a^r \cdot b^r \cdot c^r$ (формулу запишите справа за чертой);
   б) возведите степень в степень, применив формулу $(a^p)^r = a^{rp}$, и если основание степени — составное число, то запишите его в виде произведения степеней простых чисел и примените п. а);

   например: $216^{\frac{1}{3}} = \left(2^3 \cdot 3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = 6$

в) выполните действие умножения (деления) степеней с одинаковыми основаниями, применив формулу $a^r \cdot a^p = a^{r+p}$ (или $a^r : a^p = a^{r-p}$); если несколько множителей или делителей, то запишите одно основание с показателем, равным сумме или разности показателей в зависимости от формулы $a^r \cdot a^p = a^{r+p}$ или $a^r : a^p = a^{r-p}$.

Например: $\dfrac{3^2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-1}}{2^{-2} \cdot 3^{1,5}} = 3^{2-\frac{1}{2}-1,5} \cdot 2^{-1-(-2)} = 3^0 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

3. Если есть степени с одинаковыми показателями, то умножьте степени по формуле $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$.

4. Выполните действие сложения полученных результатов.

5. Запишите ответ.

З а м е ч а н и е. Если какой-либо шаг алгоритма оказался не нужен, то переходите к следующему шагу, пока не придете к ответу.



Вычислите.

1. $(5^{\frac{1}{2}})^3$

2. ЭМ. $(27^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2)^{\frac{5}{6}}$

3. ЭМ. $\dfrac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{6}}}$

4. ЕГЭ. $(0,001)^{-\frac{1}{3}} + 27^{-2\frac{1}{3}} + (6^0)^5 \cdot 2 - 3^{-4} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} \cdot 27$

Решение.

1. $(5^{\frac{1}{2}})^3 = 5^{\frac{1}{2} \cdot 3} = 5^{\frac{3}{2}}$ | $(a^r)^p = a^{rp}$

2. 1) Возведем в степень произведение: | $2^{\frac{1}{5}} \cdot 2 = 2^{\frac{6}{5}}$

$(27^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2)^{\frac{5}{6}} = (27^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{6}} \cdot (2^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} =$ | $(abc)^r = a^r \cdot b^r \cdot c^r$

2) Возведем степени в степень:

$$=27^{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}}\cdot 2^{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}}=27^{\frac{1}{3}}\cdot 2^1=3^{3\cdot\frac{1}{3}}\cdot 2=3^1\cdot 2=6$$

$(a^r)^p=a^{rp}$

Ответ: 6.

3. 1) Умножим дроби:

$$\frac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{6}}}=\frac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}\cdot 8^{\frac{1}{4}}}{9^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{6}}}=$$

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

2) Умножим и разделим степени с одинаковыми основаниями:

$$=5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}\cdot 9^{-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)}=5^1\cdot 8^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{-\frac{1}{2}}=$$

$a^r\cdot a^p=a^{r+p}$

$\frac{a^r}{a^p}=a^{r-p}$

$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

3) Вычислим полученное произведение:

$$=5\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}}=5\cdot 2\cdot 3^{-1}=\frac{10}{3}$$

$(a^r)^p=a^{rp}$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

4. 1) Запишем основания степеней в виде степени с наименьшим основанием:

$$\left((0,1)^3\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(3^3\right)^{-\frac{7}{3}}+1^5\cdot 2-3^{-4}\cdot\left(3^4\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3^3=$$

$(a^r)^p=a^{rp}$

2) Возведем степени в степень:

$$=(0,1)^{-1}+3^{-7}+2-3^{-4}\cdot 3^{-6}\cdot 3^3=$$

$a^0=1;\ 1^n=1$

3) Перемножим степени:

$$=10+3^{-7}+2-3^{-4-6+3}=10+\cancel{3^{-7}}+2-\cancel{3^{-7}}=$$

$a^r\cdot a^p=a^{r+p}$

4) Сложим результаты:

$=10+2=12$

$a^{-1}=\frac{1}{a}$

Ответ: 12.

Проверь себя!

1. ЭМ. Вычислите: $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$

2. ЕГЭ. Вычислите: $3^{-4} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 - 27^{-1\frac{1}{3}} + \left(8^0\right)^3 \cdot 2 + \left(0{,}125\right)^{-\frac{2}{3}}$

3. ЕГЭ. Упростите выражение $1{,}4a^{\frac{1}{7}} : 2a^{\frac{8}{7}}$. Ответ выбрать из выражений: 1) $0{,}7a^{-1}$; 2) $2{,}8a^{\frac{9}{7}}$; 3) $0{,}7a^{\frac{1}{8}}$; 4) $7a^{\frac{1}{8}}$.

Ответы: 1. 2. 2. 6. 3. Номер верного ответа: 1.

Упрощение алгебраических выражений, содержащих степени

Общего алгоритма решения таких примеров не существует, но можно предложить несколько полезных советов к решению.

1. Разложите выражение на множители по формуле

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ или } a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \text{ и др.}$$

Полезно знать формулы сокращенного умножения для $a \pm b$, записанные через степени:

$$a - b = (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2 = (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$$

$$a - b = (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3 = (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$$

$$a + b = (a^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}})^3 = (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$$

$$a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 - (b^{\frac{1}{2}})^3 = (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)$$

$$a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}} = (a^{\frac{2}{3}})^2 - (b^{\frac{2}{3}})^2 = (a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) \text{ и т. д.}$$

Если в примере дан один из множителей какой-либо формулы, то постарайтесь догадаться, какую формулу надо применить.

2. Если есть общий множитель в каждом слагаемом, то вынесите его за скобки, чтобы «увидеть» формулу.

3. Сначала упрощайте дроби, а затем выполняйте действия.



1. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\left(\dfrac{ab\cdot a^{\frac{1}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{1}{a+b}$.

Решение.

1) Вынесем общий множитель ab за скобку в числителе дроби:

$$\left(\frac{ab\cdot a^{\frac{1}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{ab\cdot(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=(ab)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$$

$ab^{\frac{4}{3}}:ab=a^0b^{\frac{4}{3}-1}=b^{\frac{1}{3}}$ (разделим на него слагаемые) $(ab)^r=a^rb^r$

2) $$\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$$

$x^3-y^3=$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x=a^{\frac{1}{2}},\ y=b^{\frac{1}{2}}$

3) $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=a+b$

4) $(a+b)\cdot\dfrac{1}{a+b}=1$

$m\cdot\dfrac{1}{m}=1$

Ответ: 1.

2. ЕГЭ. Найдите значение выражения $\dfrac{x-y}{y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-x}{x^{\frac{1}{2}}}$, если $x=9$, $y=49$.

Решение.

1) $$\frac{(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}{y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}}=$$

$x-y=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=$
$=(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$

$= x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} + (1 - x^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} + 1 - x^{\frac{1}{2}} = 1 - y^{\frac{1}{2}}$ | $x^{\frac{1}{2}} - x = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{2}} = x^{\frac{1}{2}}(1 - x^{\frac{1}{2}})$

2) $1 - y^{\frac{1}{2}} = 1 - 49^{\frac{1}{2}} = 1 - (7^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - 7 = -6$

Ответ: –6.

Проверь себя!

1. ЕГЭ. Найдите значение выражения $\frac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4} + \frac{4y^{0,5}}{y-16}$, если $y = 18$. Ответ выбрать из выражений: 1) $9(4+3\sqrt{2})$; 2) $-\frac{1}{9}$; 3) $4+3\sqrt{2}$; 4) 9.

2. Упростите выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$.

Ответ: **1.** Номер верного ответа: 4. **2.** $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

Попробуй-ка реши!

Упростите выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$.

Ответ: $a^2 + b^2$.

§ 2 Корень n-й степени из числа

Определение. Арифметическим корнем натуральной степени n ($n \geq 2$) из неотрицательного числа a ($a \geq 0$) называется такое неотрицательное число b ($b \geq 0$), что выполняется равенство $b^n = a$.

Символически определение арифметического корня можно записать так:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ если } a \geq 0,\ b \geq 0 \text{ и } b^n = a$$

Например: $\sqrt{81} = 9$. Число 9 — арифметический корень; число -9 — корень, противоположный арифметическому корню. $\sqrt[3]{-27} = -3$. Число (-3) не является арифметическим корнем. $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$. Числа 0 и 1 — арифметические корни.

Из определения арифметического корня следует:

$$a \geq 0,\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ и } \sqrt[n]{a^n} = a$$

Замечания

1. Извлечение корней нечетной степени из отрицательных чисел сводится к извлечению корней той же степени из положительных чисел:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}, \text{ если } a < 0$$

Например: $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$, так как $(-5)^3 = -125$

Иначе: знак «минус» можно вынести из-под знака корня нечетной степени.

2. Чтобы проверить, верно ли найден корень, надо число b возвести в натуральную степень n, и если получится число a, то корень найден верно.

Например: пусть $\sqrt[4]{16} = 3$, тогда $3^4 = 16$, что неверно, и число 3 не является корнем 4-й степени из 16, а $2^4 = 16$ верно, значит, число 2 — корень.

Свойства арифметических корней n-й степени

$a \geq 0$, $b \geq 0$, n, k, m — натуральные числа, бо́льшие 2

1. $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}}$
2. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
4. $a = \sqrt[n]{a^n}$
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
6. $\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$
7. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in R$
8. $|a| = \sqrt[2n]{a^{2n}}$, $|a| = \sqrt{a^2}$, $a \in R$
9. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$
10. $a = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$

11. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

12. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

13. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b\neq 0$

14. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b\neq 0$

15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

16. $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

17. $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n b}}$

18. $\sqrt[n]{a}\geq\sqrt[n]{b}$, если $a\geq b$

Свойства арифметических корней применяются при преобразовании выражений, содержащих корни.

1. Внесение множителя под знак корня

1) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}$, если $a>0$

Например: $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=\sqrt[3]{54}$

2) $a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{|a|^n\cdot b}$, если $a<0$

Например: $-2\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{2^4\cdot 3}=-\sqrt[4]{48}$

2. Вынесение множителя из-под знака корня

1) $\sqrt[2n]{a^{2n}\cdot b}=|a|\cdot\sqrt[2n]{b}$

Например: $\sqrt[4]{(-2)^4\cdot 3}=|-2|\cdot\sqrt[4]{3}=2\cdot\sqrt[4]{3}$

2) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}\cdot b}=a\cdot\sqrt[2n+1]{b}$

Например: $\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$

3. Освобождение дроби от иррациональности в знаменателе дроби

1) $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b},\ k<n,\ b>0$

Например: $\frac{3}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[5]{2^3}}{2}$

2) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b},\ a\neq b$

Например: $\frac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}=\frac{5(\sqrt{10}+\sqrt{5})}{10-5}=\sqrt{10}+\sqrt{5}$

3) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{b}}=\dfrac{a(\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a\mp b}$

Например: $\dfrac{8}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{8\cdot(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2^2})}{3-2}=8(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$

4) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{a\cdot(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})}{a\pm b}$

Полезный совет. Если применяете основное свойство корня $\sqrt[nm]{a^m}=\sqrt[n]{a}$, то помните, что под знаком корня четной степени должно быть число $a\geq 0$, поэтому, записывая результат, ставьте знак модуля: $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$.

Например: $\sqrt[4]{(-2)^2}=\sqrt{|-2|}=\sqrt{2}$

4. Вынесение за скобки общего множителя, применив формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

Например: $\sqrt{33}-\sqrt{3}=\sqrt{11\cdot 3}-\sqrt{3}=\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{11}-1\right)$



Вычислите: $3\sqrt{\dfrac{5}{9}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{180}$.

Решение.

$3\sqrt{\dfrac{5}{9}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{180}=3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{4\cdot 5}+3\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}=$

$=\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}+3\cdot 2\cdot 3\sqrt{5}=\sqrt{5}-\sqrt{5}+18\sqrt{5}=18\sqrt{5}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b},\ a>0$

Алгоритм 2 Действия с арифметическими корнями

1. Приведите корни к одному показателю, пользуясь формулой

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k} \text{ или } \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}}, \text{ где } k,\ n = 2, 3, 4, \ldots,\ m \in N$$

2. Упростите корни, пользуясь формулой $\sqrt[n]{a^m} = a\sqrt[n]{a^{m-n}}$, $m > n$.

3. Выполните действия умножения и деления корней по формулам

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \text{ и } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

4. Извлеките корень из корня или из степени, пользуясь формулами

$$\sqrt[2n]{a^{2nk}} = |a|^k,\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a},\ \sqrt[n]{b\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{b^k a}} = \sqrt[nk]{b^k a}$$

5. Сложите корни с одинаковым показателем и с одинаковым подкоренным выражением (сложив множители перед корнем и умножив сумму на общий корень).

   Например: $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = (2 + 3 - \frac{1}{2})\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{3}$

6. Если подкоренные выражения различны, то вынесите общий множитель за скобки (если это возможно).

   Например: $\sqrt{55} - \sqrt{5} = \sqrt{11 \cdot 5} - \sqrt{5} = \sqrt{11} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{11} - 1\right)$

Замечание. Корни можно записать в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ — и применить свойства степени.



1. Выполните действия: $\dfrac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$.

Решение.

1) Приведем корни к общему показателю:

$$\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3}}=$$

Умножим и разделим корни с одинаковыми показателями:

$$=\sqrt[6]{\frac{3^4\cdot3^3}{3}}=\sqrt[6]{3^{4+3-1}}=\sqrt[6]{3^6}=3$$

2) Или запишем корни в виде степеней и выполним действия:

$$\frac{3^{\frac{2}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{6}}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=3^{\frac{6}{6}}=3$$

НОК (2, 3, 6) = 6

$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3\cdot2]{(3^2)^2}=\sqrt[6]{3^4}$

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$

$\sqrt{3}=\sqrt[2\cdot3]{3^3}=\sqrt[6]{3^3}$

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$a^m\cdot a^n:a^r=a^{m+n-r}$

$\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$

Ответ: 3.

2. Сравните числа $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt[3]{3}$.

Решение.

1) Приведем корни к общему показателю:

$\sqrt[4]{4}=\sqrt[4\cdot3]{4^3}=\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\cdot4]{3^4}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

2) Сравним корни:

$\sqrt[12]{64}<\sqrt[12]{81}\Leftrightarrow\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$

НОК (3, 4) = 12

12 : 3 = 4; 12 : 4 = 3

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$

$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$, если $a>b>0$

Ответ: $\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$.

3. Вычислите: 1) $\sqrt[5]{12^5\cdot3^5}$; 2) $\sqrt{112}\cdot\sqrt{7}$; 3) $\sqrt[5]{3^2\cdot5^3}\cdot\sqrt[5]{3^3\cdot5^2}$.

Решение.

1) $\sqrt[5]{12^5\cdot3^5}=\sqrt[5]{12^5}\cdot\sqrt[5]{3^5}=12\cdot3=36$

2) $\sqrt{112}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{112\cdot7}=\sqrt{16\cdot7\cdot7}=$
$=\sqrt{16}\cdot\sqrt{7^2}=4\cdot7=28$

3) $\sqrt[5]{3^2\cdot5^3}\cdot\sqrt[5]{3^3\cdot5^2}=\sqrt[5]{3^2\cdot5^3\cdot3^3\cdot5^2}=$
$=\sqrt[5]{3^5}\cdot\sqrt[5]{5^5}=3\cdot5=15$

$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a^n}=a$

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a^n}=a$

Алгоритм 3 Освобождение знаменателя дроби от иррациональности

I тип. В знаменателе дроби стоит корень $\sqrt[n]{a^k}$, $n>k$, n, $k \in N$, $a>0$

1. Умножьте числитель и знаменатель дроби на корень $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, чтобы в знаменателе получить $\sqrt[n]{a^n}=a$; за чертой запишите формулу $\frac{b}{\sqrt[n]{a^k}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$.

2. Если можно, то сократите полученную дробь.

Например, освободим знаменатель дроби от иррациональности:

$$\text{а) } \frac{5x}{\sqrt[5]{x^3}}; \text{ б) } \frac{3}{\sqrt{3}}; \text{ в) } \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

Покажем подробную запись.

а) $\frac{5x}{\sqrt[5]{x^3}}=\frac{5x\cdot\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^2}}=\frac{5x\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}}=5\sqrt[5]{x^2}$ | $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5]{x^5}=x$

З а м е ч а н и е. Можно сразу применить формулу $\frac{b}{\sqrt[n]{a^k}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$.

б) $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}=\frac{4\sqrt[3]{2^2}}{2}=2\sqrt[3]{4}$

II тип. В знаменателе дроби стоит выражение

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b} \text{ или } \sqrt{a}\pm b$$

1. Умножьте числитель и знаменатель дроби на выражение, стоящее в знаменателе, но с противоположным знаком перед вторым числом (сопряженное), чтобы в знаменателе получить разность квадратов $\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$ или $\left(\sqrt{a}\right)^2-b^2=a-b^2$, т. е. такое выражение, которое не содержит корня.

2. Упростите полученное выражение. Заметим, что в знаменателе дроби всегда будет разность двух чисел.

Например, освободим от иррациональности знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

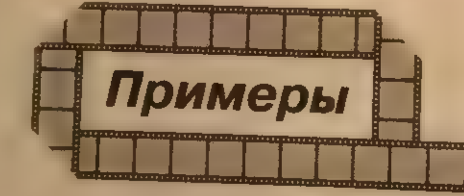
$$\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

III тип. В знаменателе дроби стоит выражение

$$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b} \text{ или } \sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$$

В знаменателе дроби надо получить выражение $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\pm\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a\pm b$, поэтому будем умножать числитель и знаменатель дроби на недостающую часть формулы:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \text{ или } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$



Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби (1—2).

1. $\frac{12}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}}$

2. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

Решение.

1. $\frac{12}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}}=\frac{12\cdot(\sqrt[3]{9^2}-\sqrt[3]{9\cdot 6}+\sqrt[3]{6^2}}{15}=$
$=\frac{4}{5}(3\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{36})$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{c(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$$
$$\sqrt[3]{9^2}=\sqrt[3]{3^4}=3\sqrt[3]{3}$$

Ответ: $\frac{4}{5}(3\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{36})$.

2. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}{3-2}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{c(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{a-b}$$

Ответ: $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$.

Вывод. Над корнями можно производить действия: умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня из корня, сложение корней одной степени и с одинаковыми подкоренными выражениями, корни можно сравнивать. Корни можно записывать в виде степени:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ a \ge 0,\ n \ge 2,\ m = 1, 2, 3, \ldots,\ m \in N,\ n \in N$$



Примеры

1. Упростите выражение.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

2) (ЕГЭ) $\sqrt[3]{8 \cdot a^3} - \left(2a + \sqrt[4]{a^2 b^8}\right)$, если $a \ge 0$

Решение.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} - \dfrac{3\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2} - \dfrac{4\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6-2} =$

$= \sqrt{6}+\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) =$

$= \sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{2} = 0$

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{c\cdot\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Внимание! Не забудьте: пишите формулы за чертой!

2) $\sqrt[3]{8 \cdot a^3} - (2a + \sqrt[4]{a^2 b^8}) =$

$= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a^3} - (2a + \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^8}) =$

$= 2a - 2a - \sqrt{|a|} \cdot b^2 = -b^2\sqrt{a},\ a \ge 0$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt[2k]{a^k} = \sqrt{|a|}$

Ответ: 1) 0; 2) $-b^2\sqrt{a}$.

2. Сократите дроби: 1) $\dfrac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-11} \cdot \sqrt{11}$; 2) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$.

Решение.

1) $\frac{(\sqrt{22}-\sqrt{2})\sqrt{11}}{\sqrt{11}-11}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{11}-1)\sqrt{11}}{\sqrt{11}(1-\sqrt{11})}=-\sqrt{2}$

$\sqrt{22}=\sqrt{11\cdot 2}=\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}$

$11=\left(\sqrt{11}\right)^2$

2) $\frac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[6]{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}=$

$=\frac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt{b})(\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{a}\sqrt{b}+b)}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}=$

$=\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab^3}+b$

$\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^3}=\left(\sqrt[6]{a}\right)^3;\ b\sqrt{b}=\sqrt{b^2}\sqrt{b}=\left(\sqrt{b}\right)^3$

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x=\sqrt[6]{a};\ y=\sqrt{b}$

$\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{b^3}=\sqrt[6]{ab^3}$

Ответ: 1) $-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab^3}+b$.

3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{((\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5})((\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$$

Ответ: $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$.

4. Упростите $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab})$.

Решение.

Запишем корни в виде степеней: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=a+b$

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

$x=a^{\frac{1}{3}},\ y=b^{\frac{1}{3}}$

Ответ: $a+b$.

5. Упростите: $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^5}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{b}-b^{-\frac{1}{2}}}$.

Решение.

Запишем корни в виде степеней: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

$$\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{4}}(1-a)}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}(1-b^2)}{b^{-\frac{1}{2}}(b-1)}=\frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)}-\frac{\overset{-1}{\cancel{(1-b)}}(1+b)}{\underset{1}{\cancel{(b-1)}}}=$$

$=1+a+1+b=2+a+b$

Ответ: $2+a+b$.

Проверь себя!

(ЕГЭ). Вычислите: $\sqrt[3]{-0{,}3}\cdot\sqrt[3]{0{,}09}$.

Ответ выбрать из чисел: 1) 0,027; 2) 0,03; 3) 0,3; 4) –0,3.

Номер верного ответа: 4.

Попробуй-ка реши!

1. Сравните числа $a=-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $b=-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{1-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{b}-b}$.

3. Избавьтесь от знака корня в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

Ответ: **1.** $a>b$. **2.** $\dfrac{1+\sqrt[4]{b}}{\sqrt{b}}$, $b>0$, $b\neq 1$. **3.** $\dfrac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$.

§ 3 Логарифм числа

Действие возведения в степень ($a^n=b$) имеет два обратных себе действия:

1) извлечение корня (нахождение основания степени a)

2) логарифмирование (нахождение показателя степени n)

$$a^n = b$$

$a = \sqrt[n]{b}$ $a > 0$ $n = \log_a b$

$a \neq 1$

корень $b > 0$ *логарифм*

Определение. *Логарифмом* положительного числа b по положительному основанию a, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Символическая запись:

$\log_a b = n$, если $b = a^n$, или $b = a^{\log_a b}$, если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

$\log_a b = n$ ← *логарифм, $n \in R$*

основание логарифма ($a > 0$, $a \neq 1$) *логарифмируемое число* ($b > 0$)

Прологарифмировать число $b > 0$ по данному основанию $a > 0$, $a \neq 1$ — значит найти такой показатель степени $n = \log_a b$, чтобы $b = a^{\log_a b}$.

Например:

а) $\log_3 9 = 2$; 2 есть логарифм числа 9 по основанию 3, так как $9 = 3^2$

б) Прологарифмируем числа: 1) 16 по основанию 2
2) 3 по основанию 5

Решение.

1. $16 = 2^n$, где $n = \log_2 16 = 4$, т. е. $16 = 2^4$

2. $3 = 5^n$, где $n = \log_5 3$, т. е. $3 = 5^{\log_5 3}$

Если основание логарифма $a = 10$, то логарифм называют ***десятичным*** и пишут $\lg b$.

Если основание логарифма $a = e$ ($e \approx 2{,}718$), то логарифм называют ***натуральным*** и пишут $\ln b$.

Например: $\log_e 3 = \ln 3$; $2 = e^{\ln 2}$

Основное логарифмическое тождество

Из определения логарифма следует, что

$$a^{\log_a b} = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Это равенство и называют *основным логарифмическим тождеством.*



Вычислите (1—3).

1. $4^{\log_4 7}$ 2. $25^{\log_5 3}$ 3. ЕГЭ. $9^{\log_9 2 + \log_5 \frac{1}{25}}$

Решение.

1. $4^{\log_4 7} = 7$ | $a^{\log_a b} = b$ $(a = 4,\ b = 7)$
2. $25^{\log_5 3} = (5^2)^{\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 3^2 = 9$ | $(a^m)^n = (a^n)^m$; $a^{\log_a b} = b$
3. $9^{\log_9 2 + \log_5 \frac{1}{25}} = 9^{\log_9 2} \cdot 9^{\log_5 \frac{1}{25}} = 2 \cdot 9^{-2} = \dfrac{2}{81}$ | $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$; $a^{\log_a b} = b$; $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Ответ: 1. 7. 2. 9. 3. $\dfrac{2}{81}$.

П о л е з н ы й с о в е т. Чтобы применить основное логарифмическое тождество, надо обратить внимание на основания логарифма и степени. Если основание логарифма не совпадает с основанием степени, то приведите основание степени (если возможно) к основанию логарифма или наоборот.

Например:

а) $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$ | $(a^m)^n = (a^n)^m$; $a^{\log_a b} = b$ $(a = 2,\ b = 5)$

б) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} = (6^2)^{\log_6 5} + 10 : 10^{\log_{10} 2} =$

$= (6^{\log_6 5})^2 + 10 : 2 = 5^2 + 5 = 30$ | $a^{m-n} = a^m : a^n$; $a^{\log_a b} = b$

Замечания

1. Логарифм — это показатель степени (с греческого – число, измеряющее отношение).
2. Уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень $x = \log_a b$, если $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Можно найти только единственный логарифм данного положительного числа $(b > 0)$ по данному основанию $a > 0$, $a \neq 1$. (*Например:* $\log_5 25 = 2$ — единственный логарифм, так как $25 = 5^2$; $25 \neq 5^n$, если $n \neq 2$.)

Свойства логарифмов

$$(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0)$$

1. $a^{\log_a b} = b$
2. $b = a^{\log_a b}$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a^k = k$
6. $k = \log_a a^k$
7. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
8. $m \cdot \log_a b = \log_a b^m = \log_{a^{\frac{1}{m}}} b$
9. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$
10. $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b = \log_a b^{-1}$
11. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$
12. $\log_{a^m} b^m = \log_a b$
13. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
14. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
15. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
16. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

Полезный совет. Не забывайте записать формулу прежде, чем применить ее.

Формулы перехода от одного основания логарифма к другому основанию ($a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1,\ c>0,\ c\neq1$)

Например:

1. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ $\qquad$ $\log_4 3=\dfrac{1}{\log_3 4}$

2. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\qquad$ $\log_2 3=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}$

2′. $\lg b=\dfrac{\ln b}{\ln 10}$ $\qquad$ $\lg 5=\dfrac{\ln 5}{\ln 10}$

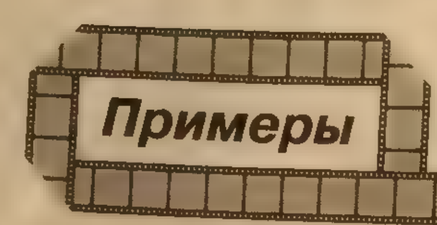
2″. $\ln b=\dfrac{\lg b}{\lg e}$ $\qquad$ $\ln 2=\dfrac{\lg 2}{\lg e}$

Алгоритм  4 Действия с логарифмами

1. Приведите основания логарифмов к одному основанию по формулам
$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\log_a b$; $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_{a^{-1}} b=-\log_a b=\log_a b^{-1}$
2. Числа без логарифмов запишите в виде логарифмов с общим основанием по формуле $k=\log_a a^k$ или через тождество $k=a^{\log_a k}$.
3. Числовой множитель n перед логарифмом ($n\log_a b$) запишите в виде показателя степени числа b по формуле $n\log_a b=\log_a b^n$ или вынесите его за скобку.
4. Упростите полученное выражение, если можно, примените тождество $a^{\log_a b}=b$.
5. Примените свойства логарифмов: $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$; $\log_a b-\log_a c=\log_a\dfrac{b}{c}$.
6. Если надо вычислить логарифм от логарифма, начинайте вычисления с первого логарифма (который внутри) и, постепенно вычисляя, найдите последний логарифм.

Например, вычислим значение выражения:

$$\underbrace{\log_2\log_3\underbrace{\log_5 125}_{\text{первый}}}_{\text{последний}} = \log_2\underbrace{\log_3 3}_{\text{первый}} = \log_2 1 = 0$$



1. Упростите и вычислите: $\log_{36} 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$.

Решение.

1) Приведем логарифмы к основанию 6:

$$\log_{6^2} 2 - \frac{1}{2}\log_{6^{-1}} 3 = \frac{1}{2}\log_6 2 + \frac{1}{2}\log_6 3 =$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$$

2) Вынесем $\frac{1}{2}$ за скобки:

$$= \frac{1}{2}(\log_6 2 + \log_6 3) =$$

$$\log_c b + \log_c a = \log_c (ab)$$

3) Сложим логарифмы:

$$= \frac{1}{2}\log_6(2\cdot 3) = \frac{1}{2}\log_6 6 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\log_a a = 1$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. ЕГЭ. Найдите значение выражения

$$((1-\log_2^2 7)\log_{14} 2 + \log_2 7)\cdot 5^{\log_5 24}$$

Решение.

1) Приведем логарифмы к основанию 2:

$$\left(\left(1-\log_2^2 7\right)\log_{14} 2 + \log_2 7\right)\cdot 5^{\log_5 24} =$$

$$= \left(\left(1^2-\log_2^2 7\right)\cdot\frac{1}{\log_2 14} + \log_2 7\right)\cdot 24 =$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$=\left(\frac{(1-\log_2 7)\cdot(1+\log_2 7)}{(1+\log_2 7)}+\log_2 7\right)\cdot 24=$$

$\log_2 14=\log_2(7\cdot 2)=$
$=\log_2 7+\log_2 2=\log_2 7+1$

2) Упростим выражение:
$=(1-\log_2 7+\log_2 7)\cdot 24=1\cdot 24=24$

$\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$

Ответ: 24.

3. Упростите: 1) $\log_2\sqrt[4]{2}$; 2) $\log_2\log_3 81$.

Решение.

1) $\log_2\sqrt[4]{2}=\log_2 2^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log_2 2=\frac{1}{4}$

$\log_a a=1$

2) $\log_2\underbrace{\log_3 81}_{4}=\log_2 4=2$

Ответ: 1) $\frac{1}{4}$; 2) 2.

Попробуй не реши!

Вычислите.

1. $0{,}5^{6\log_{0,5}2}$

2. $0{,}125^{\log_{0,5}1}$

3. $\dfrac{\log_7 14-\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$

4. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$

Ответ: 1. 2^6. 2. 1. 3. $-2\log_7 4$. 4. 19.

Попробуй-ка реши!

Вычислите.

1. $\sqrt{6^{\log_6\sqrt[5]{25}}+8^{\log_8\sqrt[7]{49}}}$

2. $\log_{\sqrt{5}}\dfrac{1}{25\cdot\sqrt[4]{5}}$

Ответ: 1. 10. 2. –4,5.



Комплексные числа[1]

Определение 1. *Мнимой единицей* (i) называется число, удовлетворяющее равенству $i^2 = -1$.

Определение 2. Числа вида $z = a + bi$, где a и b — любые действительные числа, i – мнимая единица, называются *комплексными*, причем a — *действительная часть*, bi — *мнимая часть* комплексного числа.

Например: $z_1 = 3 - 2i$ ($a = 3$, $b = -2$); $z_2 = 5 + 0i$ ($a = 5$, $b = 0$); $z_3 = 0 + 0,5i$ ($a = 0$, $b = 0,5$); число $z_2 = 5 + 0i$ — действительное, а число $z_3 = 0 + 0,5i$ — мнимое

Определение 3. Комплексное число будет *действительным*, если $b = 0$: $z = a + 0i$. Комплексное число будет *чисто мнимым*, если $a = 0$, $b \neq 0$: $z = 0 + bi$ или просто $z = bi$. Число вида $z = 0 + 0i$ равно нулю.

Определение 4. Два числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряженными* комплексными числами.

Например: $3 + 4i$ и $3 - 4i$; $-1 + i$ и $-1 - i$

Определение 5. Два числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются *противоположными* комплексными числами.

Например: $5 - 4i$ и $-5 + 4i$; i и $-i$; 2 и -2

Определение 6. Два числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называются *равными*, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Действия над комплексными числами

Сложение комплексных чисел

1. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Запишите формулу сложения за чертой и складывайте по ней комплексные числа.

Например, $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 - 2i$, найдем $z_1 + z_2$:

$$z_1 + z_2 = (2 - 3) + (1 - 2)i = -1 - i$$

---

[1] Для факультативных занятий и дополнительного изучения.

2. Сумма сопряженных комплексных чисел есть действительное число: $(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)i=2a+0i=2a$

Например: $(5+2i)+(5-2i)=(5+5)+(2-2)i=10+0i=10$

3. Сумма противоположных чисел равна 0:

$$(a+bi)+(-a-bi)=(a-a)+(b-b)i=0+0i=0$$



Выполните сложение комплексных чисел (1—3).

1. $(3-7i)+(6+5i)=$
$=(3+6)+(-7+5)i=9-2i$

2. $(1-i)+(1+i)=2$

3. $(-1+i)+(1-i)=0$

$(a+bi)+(c+di)=$
$=(a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)+(a-bi)=2a$

$(a+bi)+(-a-bi)=0$

Законы сложения комплексных чисел

I. Переместительный: $z_1+z_2=z_2+z_1$

II. Сочетательный: $z_1+z_2+z_3=(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

Вычитание комплексных чисел

$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

Например: $(3-2i)-(-4+i)=(3-(-4))+(-2-1)i=7-3i$

Умножение комплексных чисел

1. $z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

2. $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$

З а м е ч а н и е. Комплексные числа складывайте, вычитайте и умножайте как многочлены.

Например, умножим числа:

а) $(3+4i)\cdot(-1-i)=(3\cdot(-1)-4\cdot(-1))+$
$+(3\cdot(-1)+4\cdot(-1))i=(-3+4)+(-7)i=1-7i$

б) $(2+3i)\cdot(2-3i)=4+9=13$

$(a+bi)\cdot(c+di)=$
$=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$

Законы умножения комплексных чисел

Законы умножения комплексных чисел такие же, как и законы умножения действительных чисел.

I. Переместительный: $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

II. Сочетательный: $z_1\cdot z_2\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$

III. Распределительный: $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$



Выполните действия: $(3+i)\cdot(2-i)$.

Решение.

$(3+i)\cdot(2-i)=(3\cdot2-1\cdot(-1))+(3\cdot(-1)+1\cdot2)i=$
$=(6+1)+(-3+2)i=7-i$

$(a+bi)\cdot(c+di)=$
$=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Ответ: $7-i$.

Проверь себя!

Выполните действия: $(3-2i)\cdot(1-i)+(1-i)\cdot(1+2i)$.

Ответ: $4-4i$.

Деление комплексных чисел

Если $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_2\neq0+0i$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

При делении двух комплексных чисел надо умножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, и записать ответ в виде $z = x + yi$.

Например, разделим числа:

$$\frac{-3+i}{2-3i} = \frac{(-3+i)\cdot(2+3i)}{4+9} = \frac{(-6-3)+(2-9)i}{13} = -\frac{9}{13} - \frac{7}{13}i$$

$$\frac{a+bi}{c-di} = \frac{(a+bi)(c+di)}{c^2+d^2}$$

Проверь себя!

Разделите.

1. $\frac{3}{1-i}$ 2. $\frac{2+i}{2}$ 3. $\frac{1+i}{1-i}$ 4. $\frac{5-3i}{2+i}$

Ответ: 1. $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$. 2. $1+\frac{1}{2}i$. 3. i. 4. $\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$.

Возведение мнимой единицы в натуральную степень

$$i^0 = 1;\ i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^5 = i^4 \cdot i = i \text{ и т. д.}$$

Вывод. i^n дает четыре вида степени:

1) $i^{4k+1} = i^1 = i$
2) $i^{4k+2} = i^2 = -1$
3) $i^{4k+3} = i^3 = -i$
4) $i^{4k+4} = i^4 = 1,\ k \in N$

Например:

а) $i^{15} = i^{12+3} = i^3 = -i$
б) $(-i)^6 = i^6 = i^2 = -1$
в) $i^8 = i^{4+4} = i^4 = 1$
г) $i^{101} = i^{25\cdot4+1} = i^1 = i$

Полезный совет. При возведении мнимой единицы в степень $n > 4$ разделите n на 4, тогда остаток от деления (1, 2, 3, 4) даст показатель известной степени.

Возведение в степень комплексного числа

$$(a+bi)^n = \underbrace{(a+bi)\cdot(a+bi)\cdot\ldots\cdot(a+bi)}_{n\text{ раз}},\ n\in N$$

$$(a+bi)^0=1,\ (a+bi)^{-n}=\frac{1}{(a+bi)^n}$$

Например, возведем в степень число $(2-3i)^{-2}$:

$$(2-3i)^{-2}=\frac{1}{(2-3i)^2}=\frac{1}{4-12i+9i^2}=\frac{1}{-5-12i}$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$9i^2=-9$

Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Квадратный корень из комплексного числа находится по формуле:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

(В скобках знак «+» берется при $b>0$, а знак «−» берется при $b<0$.)

Например, извлечем корень квадратный из числа $4+3i$:

$$\sqrt{4+3i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{16+9}+4}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{16+9}-4}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

$a=4,\ b=3$
в скобках знак «+»

Ответ: $\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Проверь себя!

Извлеките квадратный корень из числа.

1. $\sqrt{3-4i}$ **2.** $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ **3.** $\sqrt{-\sqrt{3}+i}$

Ответ: **1.** $\pm(2-i)$. **2.** $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. **3.** $\pm\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}i\right)$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Назовем ось Ox *действительной осью* и будем на ней откладывать значения a. Ось Oy назовем *мнимой осью* и будем на ней откладывать значения b.

I. Число $z = a + bi$ можно изображать точкой $M(a; b)$.

Число $z = 0 + bi$ — точка на оси Oy, число $z = a + 0i$ изобразится точкой $M(a; 0)$ на оси Ox, число $z = 0 + 0i$ — точкой $O(0; 0)$.

Каждому числу соответствует единственная точка плоскости $M(a; b)$, и, наоборот, каждой точке $M(a; b)$ — единственное число $z = a + bi$, где a и b — координаты точки.

Например, изобразим числа в системе xOy (рис. 2):

$z_1 = -2 + 5i \Leftrightarrow M_1(-2; 5)$

$z_2 = 3 - i \Leftrightarrow M_2(3; -1)$

$z_3 = 5 + 3i \Leftrightarrow M_3(5; 3)$

$z_4 = 0 + 4i \Leftrightarrow M_4(0; 4)$

$z_5 = -3 - 2i \Leftrightarrow M_5(-3; -2)$

$z_6 = 4 + 0i \Leftrightarrow M_6(4; 0)$

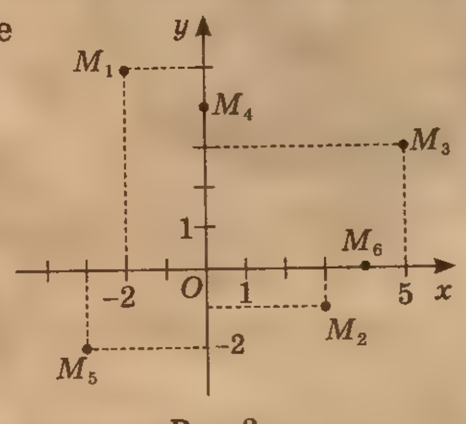


Рис. 2

II. Число $z = a + bi$ можно изображать вектором $\overrightarrow{OM}$, где $O(0; 0)$ — начало вектора и $M(a; b)$ — конец вектора (рис. 3).

Например:

$\overrightarrow{OM_0}$ изображает число $z_0 = 0 + 3i$

$\overrightarrow{OM_1}$ изображает число $z_1 = 4 + 2i$

$\overrightarrow{OM_2}$ изображает число $z_2 = 2 + 0i$

$\overrightarrow{OM_3}$ изображает число $z_3 = 2{,}5 - 5i$

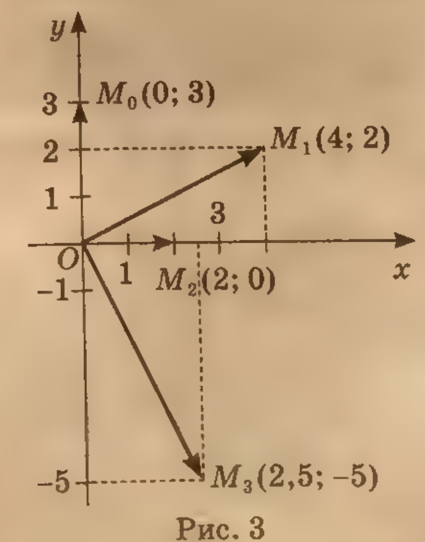


Рис. 3

Модуль комплексного числа

Определение. *Модуль комплексного числа* — это длина вектора $\overrightarrow{OM}$.

$$|a+bi| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2+b^2} = r \qquad |a+bi| = |a-bi| = \sqrt{a^2+b^2} = r$$



Найдите модуль числа $z_0 = -4 + 3i$.

Решение. $z_0 = -4+3i$, $|z_0| = \sqrt{16+9} = 5$

Проверь себя!

Изобразите комплексное число вектором и найдите его модуль.

1. $z_1 = -3-4i$ **2.** $z_2 = 1+2i$ **3.** $z_3 = -\sqrt{3}+3i$

Ответ: (рис. 4) **1.** $|z_1| = 5$. **2.** $|z_2| = \sqrt{5}$. **3.** $|z_3| = 2\sqrt{3}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение 1. *Аргументом комплексного числа* называется угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox. φ — главное значение аргумента (arg), $-180° < \varphi \le 180°$ (рис. 5).

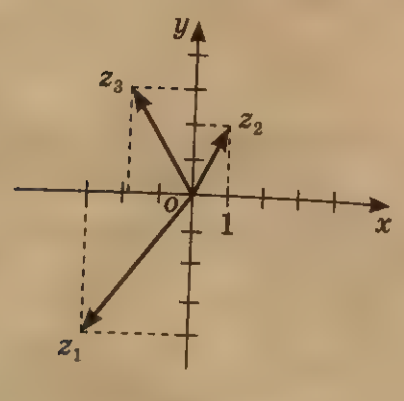


Рис. 4

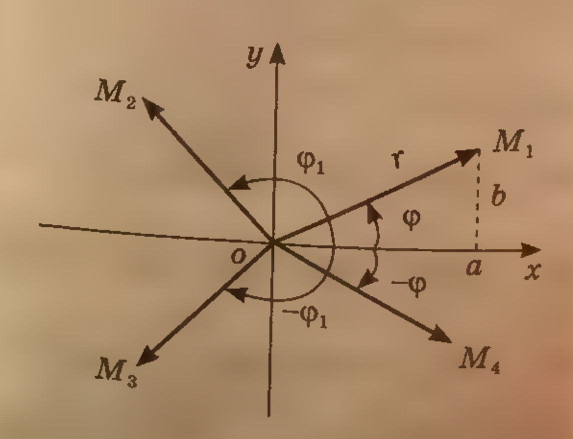


Рис. 5

Каждое комплексное число z имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на $360° \cdot k$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$

Число $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$.

$$z = a + bi = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)),\ k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$$

Определение 2. Если $z \neq 0$, то

$$z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)),\ \text{где } k \in \mathbf{Z},$$

называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Определение 3. $z_1 = z_2$, если $r_1 = r_2$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$.

Например, найдем главное значение аргумента ($\arg(z)$) комплексного числа:

а) $\arg(a + 0i) = 0$, если $a > 0$

б) $\arg(-a + 0i) = \pi$, если $a > 0$

в) $\arg(0 + bi) = \frac{\pi}{2}$, если $b > 0$

г) $\arg(0 - bi) = -\frac{\pi}{2}$, если $b > 0$



Найдите главное значение φ комплексного числа $\sqrt{3} + i$.

Решение.

$a = \sqrt{3}$; $b = 1$ (I четверть)

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$\arg\left(\sqrt{3} + i\right) = \frac{\pi}{6}$ (φ в I четверти)

Алгоритм 5 Перевод комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую форму

Дано: $z = a + bi$. **Найти:** $z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$

1. Запишите формулу $z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$, $k = 0; 1; 2; \ldots$
2. Найдите $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. Определите знаки a и b и четверть, в которой лежит вектор $\overrightarrow{OM}$.
4. Найдите $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ и определите $\arg(z)$.
5. Подставьте значения r и φ в формулу п. 1 и запишите ответ.

Например, запишем в тригонометрической форме число $z = 1 - i$. Для этого применим алгоритм.

1) Запишем формулу $z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$, $k \in Z$
2) Найдем $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
3) $a = 1$, $b = -1$, значит, $\overrightarrow{OM}$ в IV четверти
4) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$, значит, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$
5) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $k = 0$

Проверь себя!

Запишите в тригонометрической форме число $z = -1 + i$.

Ответ: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $k = 0$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

I. Умножение комплексных чисел

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Умножение сопряженных чисел:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r^2(\cos 0° + i\sin 0°) = r^2$$



Умножьте комплексные числа:

$$(\cos 20° + i\sin 20°) \cdot 6(\cos 25° + i\sin 25°)$$

Решение.

$(\cos 20° + i\sin 20°) \cdot 6(\cos 25° + i\sin 25°) = 6(\cos 45° + i\sin 45°)$

Ответ: $6(\cos 45° + i\sin 45°)$.

Проверь себя!

Умножьте числа.

1. $\sqrt{3}\,(\cos(-135°) + i\sin(-135°)) \cdot 2(\cos 60° + i\sin 60°)$
2. $z_1 \cdot z_2 = (1 + i) \cdot (-3 + 3i)$ в тригонометрической форме

Ответ: 1. $2\sqrt{3}\,(\cos(-75°) + i\sin(-75°))$.

2. $z_1 \cdot z_2 = 6(\cos 180° + i\sin 180°)$.

II. Деление комплексных чисел

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big),$$

если $z_2 \neq 0 + 0i$.



Выполните деление z_1 на z_2, если:

$$z_1 = \sqrt{3}\,(\cos 160° + i\sin 160°),\ z_2 = 2(\cos 40° + i\sin 40°)$$

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}\left(\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ\right)}{2\left(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right)$.

Проверь себя!

Разделите z_1 на z_2.

$z_1=8(\cos(-75^\circ)+i\sin(-75^\circ))$; $z_2=4(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$

Ответ: $2(\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ))$.

III. Возведение в натуральную степень комплексного числа. Формула Муавра

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in N$$

При $r=1$ получим

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(\varphi\cdot n)+i\sin(\varphi\cdot n)$$ — формула Муавра



Возведите в степень число $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6$.

Решение.

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6=\cos\frac{\pi\cdot 6}{4}+i\sin\frac{\pi\cdot 6}{4}=$$

$$=\cos\frac{3\cdot\pi}{2}+i\sin\frac{3\cdot\pi}{2}=0-i$$

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(\varphi\cdot n)+$$
$$+i\sin(\varphi\cdot n)$$

Ответ: $-i$.

По формуле Муавра выведем формулы для $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$.

$n = 2$:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + i2\sin\varphi\cos\varphi + i^2\sin^2\varphi = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + i2\sin\varphi\cos\varphi$$

Числа $(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$ и $((\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + i2\sin\varphi\cos\varphi)$ равны, тогда $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ и $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

$z_1 = a + bi$
$z_2 = c + di$
Если $z_1 = z_2$, то $a = c$, $b = d$

$n = 3$:

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \underline{\cos 3\varphi} + i\sin 3\varphi$
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \underline{\cos^3\varphi} + 3\cos^2\varphi \times i\sin\varphi +$
$+ \underline{3\cos\varphi(i^2 \cdot \sin^2\varphi)} + i^3\sin^3\varphi =$
$= (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi) + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$

$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi =$
$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot (1 - \cos^2\varphi) =$
$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi + 3\cos^3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b +$
$+ 3ab^2 + b^3$
$i^2 = -1$, $i^3 = -i$

$a + bi = c + di$,
если $a = c$ и $b = d$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3(1 - \sin^2\varphi)\sin\varphi - \sin^3\varphi =$$
$$= 3\sin\varphi - 3\sin^3\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

Проверь себя!

Возведите в степень число.

1. $(2(\cos 15° + i\sin 15°))^4$

2. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$

Ответ: 1. $16(\cos 60° + i\sin 60°)$. 2. $\cos(-120°) + i\sin(-120°)$.

IV. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа

$$\sqrt[n]{r\left(\cos\left(\varphi + 360° \cdot k\right) + i\sin\left(\varphi + 360° \cdot k\right)\right)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 360° \cdot k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 360° \cdot k}{n}\right)$$

$$n = 2, 3, 4, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ n - 1$$



Найдите $\sqrt[3]{1}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1\cdot(\cos(360°\cdot k)+i\sin(360°\cdot k))}=$$
$$=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{360°\cdot k}{3}+i\sin\frac{360°\cdot k}{3}\right)=$$
$$=1\cdot(\cos(120°\cdot k)+i\sin(120°\cdot k)),$$
$k=0,\ 1,\ 2$

$1=1+0i,\ r=1$
$\mathrm{tg}\varphi=0\Rightarrow\varphi=0°$
$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$
$$=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+360°\cdot k}{n}+i\sin\frac{\varphi+360°\cdot k}{n}\right)$$

Ответ: $\sqrt[3]{1}=1\cdot(\cos120°\cdot k+i\sin120°\cdot k),\ k=0,\ 1,\ 2.$

1) $k=0;\ z_1=1\cdot(\cos0°+i\sin0°)=1$

2) $k=1;\ z_2=1\cdot(\cos120°+i\sin120°)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $k=2;\ z_3=1\cdot(\cos240°+i\sin240°)=1\cdot(\cos(-120°)+i\sin(-120°))=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

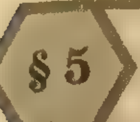
$$a=\cos(-120°)=\cos120°=-\frac{1}{2}$$
$$b=\sin(-120°)=-\sin120°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

α в III четверти

Проверь себя!

Извлеките корень из числа $\sqrt[3]{-1}$.

Ответ: $1\cdot(\cos60°+i\sin60°)$; $1\cdot(\cos180°+i\sin180°)$;
$1\cdot(\cos(-60°)+i\sin(-60°))$.



Решение квадратных и биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел

Квадратные и биквадратные уравнения на множестве комплексных чисел решаются так же, как на множестве действительных чисел, с учетом того, что $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i,\ a > 0$.



Решите уравнения.

1. $x^2 + 2x + 3 = 0$ 2. $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$

Решение.

1. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-2}$

$x_1 = -1 + \sqrt{2} \cdot i$

$x_2 = -1 - \sqrt{2} \cdot i$

$x^2 + px + q = 0;\ p = 2;\quad q = 3$

$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\sqrt{-2} = \sqrt{2 \cdot (-1)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{2} \cdot i$

Ответ: $x_1 = -1 + \sqrt{2} \cdot i,\ x_2 = -1 - \sqrt{2} \cdot i$.

2. $t^2 - 6t - 7 = 0$

$t_1 = 7 \Rightarrow x^2 = 7$

$t_2 = -1 \Rightarrow x^2 = -1$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{7},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$x^2 = t$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1 \cdot t_2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 7 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$

Ответ: $x_1 = \sqrt{7},\ x_2 = -\sqrt{7},\ x_3 = -i,\ x_4 = i$.

З а м е ч а н и е. Уравнение n-й степени имеет n корней.

Решение двучленных уравнений

Определение. Двучленным уравнением называется уравнение вида $a \cdot x^m + b = 0\ (a \neq 0)$.

Алгоритм 6 Решение уравнений вида $a \cdot x^m + b = 0$

1. Найдите $x^m = -\frac{b}{a} = q$ и решите уравнение $x^m = \pm q$.

2. Преобразуйте уравнение $x^m = \pm q$ к виду $z^n = 1$ или $z^n = -1$. Обозначьте $x = \sqrt[m]{q} \cdot z$ (так как $(\sqrt[m]{q} \cdot z)^m = q \Rightarrow q \cdot z^m = q,\ z^m = \pm 1$).

3. Полученные уравнения 3-й и 4-й степеней решите разложением на множители по формулам: $z^3 \pm 1 = 0 \Rightarrow (z \pm 1)(z^2 \mp z + 1) = 0$; $z^4 \pm 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (z^2 + i)(z^2 - i) = 0$ или $(z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0$.

4. Полученные уравнения 5-й, 6-й, ... степеней решите переводом числа $z = \sqrt[m]{\pm q}$ в тригонометрическую форму комплексного числа, а затем найдите $x = \sqrt[m]{q} \cdot z$.

5. Запишите ответ.



Решите уравнение $x^3 - 1 = 0$.

<u>*Решение.*</u>

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ или } x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Проверь себя!

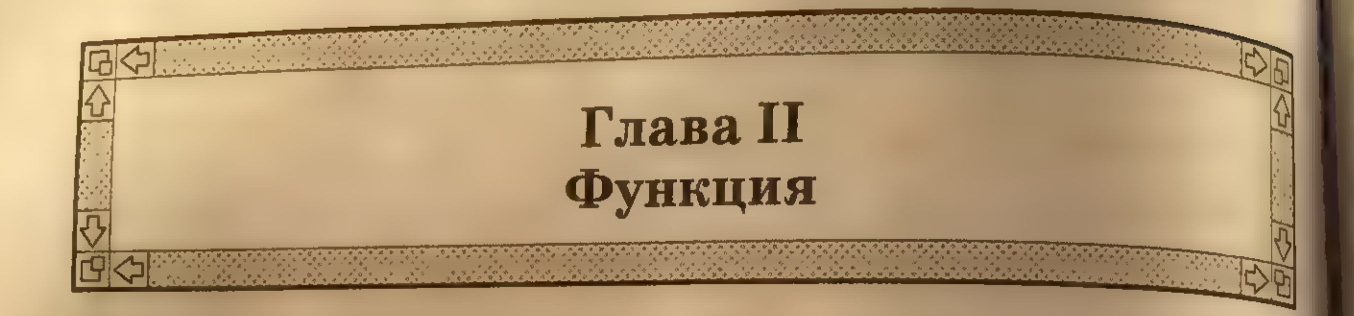
Решите уравнения.

1. $81x^4 - 625 = 0$
2. $x^6 - 1 = 0$
3. $x^3 - 8 = 0$

Ответ: **1.** $x_{1,2} = \pm\frac{5}{3},\ x_{3,4} = \pm\frac{5}{3}i.$

2. $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

3. $x_1 = 2,\ x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i.$



Глава II
Функция

Понятие о переменных и постоянных величинах

Величины, которые меняют свое значение в условиях данной задачи, называются *переменными*, а которые не меняют значения, — *постоянными*. Всегда постоянные называются *константами* (const).

Например: числа π, e, $\sqrt{2}$, 0, 1 — константы

Переменные могут быть двух видов: *независимые* и *зависимые*.

1) Если две переменные величины связаны так, что каждому значению одной из них соответствует единственное значение другой, то та из них, которая может принимать любые допустимые значения, называется *независимой переменной*, или *аргументом*.

2) Переменная, значения которой зависят от аргумента, называется *функцией*, или *зависимой переменной*.

Например: $s = v \cdot t$, где v — постоянная, t — аргумент, s — функция, зависит от t.

3) Зависимость между переменными, при которой каждому значению одной переменной соответствует только одно значение другой переменной, называется *функциональной зависимостью*.

Определение. *Функцией* называется зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению одной переменной (*аргументу*) можно сопоставить только одно значение другой переменной (*функции*).

Замечание. Словом «функция» обозначают и переменную и зависимость.

Условное обозначение функции: $y = F(x)$; $y = f(x)$ (y есть функция от x). Такая запись указывает, что x — это аргумент, а y — функция, но не указывает на конкретную функцию.

Способы задания функции

Функция может быть задана:

1. ***Аналитически***, т. е. формулой.

Например: $y = kx$; $y = \sin x$; $y = ax^2$; $y = \sqrt{x}$

2. ***Таблицей:*** верхняя строка таблицы содержит несколько допустимых значений аргумента x; нижняя строка таблицы содержит значения функции y, вычисленные от взятых значений x.

x	x_1	x_2	x_3	...
y	y_1	y_2	y_3	...

3. ***Графиком*** — множеством точек, абсциссами которых являются значения x (аргумента), а ординатами — значения y (функции).

4. ***Упорядоченными парами*** $(x_0; f(x_0)), (x_1; f(x_1)), \ldots$

5. ***Правилом.***

С помощью функций можно изучать процессы в физике, химии, биологии и других науках; математика изучает зависимость между переменными абстрактно, не учитывая физические или химические свойства величин, участвующих в процессах.

Элементарные функции

I. Степенные функции

1. $y = kx$ — прямая пропорциональная зависимость

2. $y = \frac{k}{x}$ — обратная пропорциональная зависимость

3. $y = ax^2$ — квадратичная функция

4. $y = ax^3$ — кубическая функция

5. $y = ax^{2n}, n \in N$

6. $y = ax^{2n+1}, n \in N$

7. $y = k \cdot x^{-2n} = \frac{k}{x^{2n}}, n \in N$

8. $y = k \cdot x^{-(2n+1)} = \frac{k}{x^{2n+1}}, n \in N$

9. $y = x^{\frac{k}{n}}, k \in N, n \in N$

10. $y = x^{-\frac{k}{n}}, k \in N, n \in N$

II. Функции, содержащие переменную под знаком корня

1. $y=\sqrt{x}$ 2. $y=\sqrt[n]{x^k}$, $n \in N$, $n \geq 2$

III. Функции, заданные многочленом

1. $y=kx+b$ — линейная функция
2. $y=ax^2+bx+c$ — квадратичная функция

IV. Показательная функция

$y=a^x$, где $a>0$, $a \neq 1$

V. Логарифмическая функция

$y=\log_a x$, где $a>0$, $a \neq 1$

VI. Тригонометрические функции

1. $y=\sin x$
2. $y=\cos x$
3. $y=\operatorname{tg} x$
4. $y=\operatorname{ctg} x$
5. $y=\sec x$
6. $y=\operatorname{cosec} x$

VII. Обратные тригонометрические функции

1. $y=\arcsin x$
2. $y=\arccos x$
3. $y=\operatorname{arctg} x$
4. $y=\operatorname{arcctg} x$

VIII. Функции, составленные из комбинаций функции I—VII, изучаются с помощью производной.

План исследования функции

Исследование функции и построение ее графика будем проводить по такому плану:

1. $D(f)$ — область определения функции
2. $E(f)$ — множество значений функции
3. Нули функции
4. Четность, нечетность функции
5. Промежутки знакопостоянства
6. Монотонность функции
7. Наибольшее, наименьшее значения функции
8. Периодичность функции
9. Обратимость функции

При построении графика функции будем следовать этому плану (при необходимости отступая от его последовательности).

§ 1 Область определения функции

Определение. Область определения функции $D(f)$ — это множество всех допустимых значений аргумента x.

Например: область определения функций

$y = kx,\ y = kx + b,$
$y = ax^2,\ y = ax^2 + c,\ y = ax^2 + bx + c,$
$y = kx^3,\ y = kx^n\ (n \in N),$
$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x,$
$y = P(x)$ ($P(x)$ — многочлен),
$y = a^x,\ y = \sqrt[2n+1]{f(x)}$
есть множество R действительных чисел.

З а м е ч а н и е. Обычно $D(f)$ записывают числовыми промежутками и условно изображают на оси Ox дугами или штриховкой.

Таблица промежутков

Неравенство	Промежуток	Изображение на оси
$x > a$	$(a; +\infty)$ интервал	a x
$x < a$	$(-\infty; a)$ интервал	a x
$a < x < b$	$(a; b)$ интервал	a b x
$a \le x \le b$	$[a; b]$ отрезок	a b x

Неравенство	Промежуток	Изображение на оси
$x \geq a$	$[a; +\infty)$ луч	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$ луч	
$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty; +\infty)$ вся прямая	

Запишем область определения еще для некоторых функций:

1) $y=\frac{k}{x}$, $y=\frac{k}{x^2}$:

$D(y)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$

2) $y=\sqrt{x}$: $D(y)=[0; +\infty)$

3) $y=\log_a x$: $D(y)=(0; +\infty)$

$\frac{a}{b}$ имеет смысл, если $b\neq 0$

$\sqrt{a}$ имеет смысл при $a\geq 0$

$\log_a b$ имеет смысл при $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$

С областью определения функции связана *непрерывность* функции. Все элементарные функции, которые изучаются в школьном курсе, непрерывны на своей области определения, т. е. они не являются непрерывными только в тех точках, в которых они не определены.

Например:

а) функции $y=\frac{k}{x}$, $y=\frac{k}{x^2}$, $y=\frac{k}{x^n}$ $(n\in \boldsymbol{N})$ не определены в точке $x_0=0$;

б) функции $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\sec x$ не определены в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

в) функции $y=\mathrm{ctg}x$ и $y=\mathrm{cosec}x$ не определены в точках $x=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, и непрерывны при всех остальных значениях $x\in \boldsymbol{R}$.

Каждая непрерывная функция имеет график в виде одной непрерывной линии, которую можно провести одним движением руки, не отрывая ее от листа бумаги, а функции, которые не определены в некоторых точках, имеют график, состоящий из двух или множества отдельных линий.

Например, график функции $y=\frac{1}{x}$ (гипербола) состоит из двух непрерывных линий, а графики функций $y = \operatorname{tg}x$ и $y = \operatorname{ctg}x$ состоят из множества линий, каждая из которых неограниченно приближается к прямой, проходящей через точку, в которой функция не определена, параллельно оси Oy. Такие прямые называются *асимптотами*. Для функций $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^{2n}}$, $y=\frac{1}{x^{2n+1}}$ $(n \in N)$ асимптотами являются оси координат.

Полезный совет. Чтобы по заданному графику функции найти ее область определения, надо спроектировать график на ось Ox и записать промежуток значений абсцисс между абсциссами крайних точек графика:

отрезок $[a; b]$, если точки с абсциссами a и b принадлежат графику;

интервал $(a; b)$, если точки с абсциссами a и b не принадлежат графику.



ЭМ. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком (рис. 6). Найдите по графику $D(f)$.

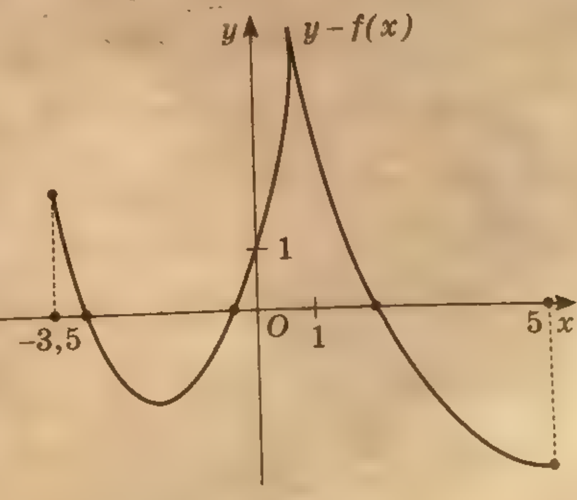


Рис. 6

Решение.

$D(f)$ — это значения x, поэтому опустим перпендикуляры из крайних точек графика на ось Ox и запишем абсциссы концов отрезка на оси Ox слева направо: $x_1=-3{,}5$; $x_2=5$. Тогда все значения x отрезка $[-3{,}5; 5]$ и будут областью определения функции.

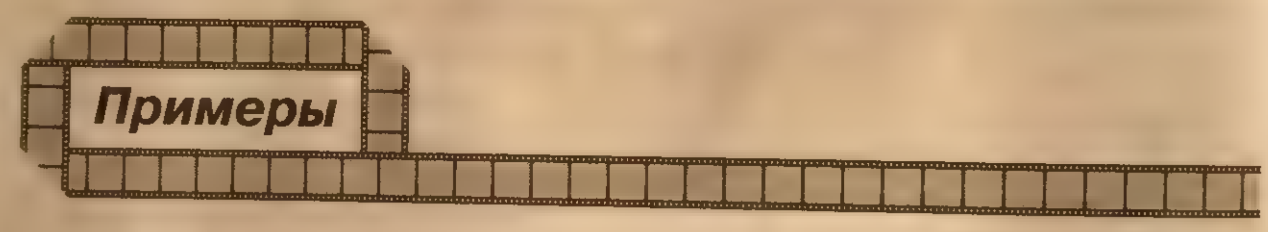
Ответ: $D(f)=[-3{,}5; 5]$.

Алгоритм 7 Нахождение $D(y)$ функции $y=\sqrt[2n]{f(x)},\ n \in N$

1. Найдите $D(f)$.
2. Запишите за чертой условие существования корня четной степени по определению арифметического корня:

$$\sqrt[2n]{f(x)} \text{ имеет смысл, если } f(x) \geq 0$$

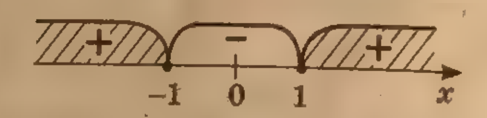
3. Решите неравенство $f(x) \geq 0$, учитывая $D(f)$, и изобразите решение неравенства на числовой оси.
4. Запишите ответ в форме промежутков (или в виде неравенства).



1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2-1}$.

Решение.

1) $f(x)=x^2-1$ – многочлен; $D(f)=R$
2) $x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$



$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл, если $f(x) \geq 0$, примените метод интервалов

3) $(-\infty; -1] \subset R$ и $[1; +\infty) \subset R$

Ответ: $D(y)=(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

2. ЭМ. Дана функция $f(x)=\sqrt{9-x^2}-\sqrt{6-x-x^2}$. Найдите $D(f)$.

Решение.

1) $D(9-x^2)=R$ и $D(6-x-x^2)=R$
2) Составим и решим систему двух неравенств.

$$\begin{cases} 9-x^2\ge 0 & \Big| \cdot(-1) \\ 6-x-x^2\ge 0 & \Big| \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9\le 0 \\ x^2+x-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\sqrt{\varphi(x)}$ имеет смысл при $\varphi(x)\ge 0$

$x^2+x-6=0$

$$\begin{cases} (x-3)(x+3)\le 0 \text{ (I)} \\ (x-2)(x+3)\le 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

+ + − − −3 2 3 + + x I II

$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=-3;\ x_2=2$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$

Общее решение неравенств на множестве R: $[-3;\ 2]$

Ответ: $D(f)=[-3;\ 2]$.

П о л е з н ы й с о в е т. Если функция содержит корень только нечетной степени: $y=\sqrt[2n+1]{f(x)},\ n\in N$, то $D(y)=D(f)$.

Например: $y=\sqrt[3]{x^2-4}$ имеем $D(y)=D(f)=(-\infty;\ +\infty)$

3. ЕГЭ. Найдите область определения функции $y=\underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}-1}}_{\varphi(x)}$.

<u>*Решение.*</u>

1) $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}-1\ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}\ge 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}\ge \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow 3x-7\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x\le 7 \Leftrightarrow x\le \frac{7}{3}$

$\left(-\infty;\ \frac{7}{3}\right]\subset \boldsymbol{R}$

$\varphi(x)=a^{f(x)}-1,\ f(x)=3x-7$

$\sqrt{\varphi(x)}$ имеет смысл, если $\varphi(x)\ge 0$;

$1=\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$

$0<\frac{1}{3}<1$, значит, $y=a^{f(x)}$ убывает, и если $a^m\ge a^n$, то $m\le n$

Ответ: $D(y)=\left(-\infty;\ \frac{7}{3}\right]$, или $x\le \frac{7}{3}$.

Алгоритм 8 Нахождение $D(y)$ функции $y = \log_a f(x)$

1. Найдите $D(f)$.
2. Запишите за чертой условие существования логарифма по его определению: $y = \log_a f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$ и $x \in D(f)$.
3. Составьте систему, учитывая п. 2, и решите ее:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \\ x \in D(f) \end{cases}$$

4. Для функции $y = \log_a f(x)$, где a — число, $a > 0$, $a \neq 1$, областью определения $D(y)$ будет решение неравенства $f(x) > 0$, если $x \in D(f)$.
5. Запишите ответ в форме промежутков (или в виде неравенства).

Примеры

1. Дана функция $y = \log_x \underbrace{(1-x)}_{f(x)}$. Найдите $D(y)$.

Решение.

1) $D(f) = R$

2) $\begin{cases} 1-x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Промежуток (0; 1) входит в $D(f)$

$\log_a b$ имеет смысл, если $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ $b = 1 - x$; $a = x$

Ответ: $D(y) = (0;\ 1)$.

2. ЕГЭ. Найдите область определения функции $y = \log_{\sqrt{2}} \underbrace{(2x - \sqrt{2}x^2)}_{f(x)}$.

Решение.

1) $D(f) = R$, $f(x)$ — многочлен

2) $2x - \sqrt{2}x^2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x(\sqrt{2} - x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(\sqrt{2} - x) > 0$

(схема: – 0 + $\sqrt{2}$ – , ось x)

$(0;\ \sqrt{2}) \subset R$

$y = \log_{\sqrt{2}}(f(x))$
имеет смысл, если
$f(x) > 0$
Применим метод интервалов
(алгоритм 53)
$2x - \sqrt{2}x^2 = 0$
$x = 0,\ x = \sqrt{2}$

Ответ: $D(y) = (0; \sqrt{2})$.

Проверь себя!

Найдите $D(y)$, если:

1. $y = \log_3(4 - x^2)$

2. **ЕГЭ.** $y = \ln(x^2 - 3)$. Выбрать ответ из:

1) $(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$
2) $(-\infty;\ \sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};\ +\infty)$
3) $(-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$
4) $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$

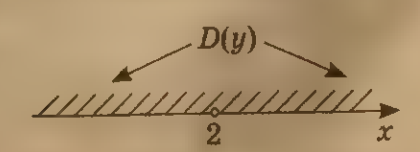
Ответ: 1. $(-2; 2)$. 2. Номер верного ответа: 3.

Алгоритм 9. Нахождение $D(y)$ функции $y = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$

1. Найдите пересечение $D(\varphi) \cap D(f)$ (если $\varphi(x) = a$ — постоянная, то найдите только $D(f)$).
2. Напишите за чертой условие существования дроби: дробь $\frac{a}{b}$ имеет смысл, если $b \neq 0$.
3. Приравняйте знаменатель дроби нулю и решите уравнение: $f(x) = 0$.
4. Отбросьте из $D(f)$ (п. 1) все корни уравнения (п. 3) и запишите в ответ оставшиеся промежутки.
5. Запишите ответ.

З а м е ч а н и е. Область определения функции — это множество значений x, при которых функция имеет смысл, поэтому ее нельзя за-

писать отбрасыванием корней знаменателя, а надо записать значения x промежутками.



Например: для функции $y = \dfrac{5}{x-2}$

$D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$, а не $x \neq 2$



1. ЭМ. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-3x-4}}$. Найдите область определения функции $y = f(x)$.

Решение.

1) $D(p) = R$, $D(t) = R$

2) $\begin{cases} x^2-3x-4 \geq 0 \\ x^2-3x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-3x-4 > 0$

$(x+1)(x-4) > 0$

$+$ -1 $-$ 4 $+$ x

$\left.\begin{aligned} x-4 &= p(x) \\ x^2-3x-4 &= t(x) \end{aligned}\right\}$ многочлены

$\sqrt{t(x)}$ имеет смысл, если $t(x) \geq 0$

дробь $\dfrac{p(x)}{t(x)}$ имеет смысл, если $t(x) \neq 0$

Применим метод интервалов

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1;\ x_2 = 4$

3) $(-\infty; -1) \subset R$; $(4; +\infty) \subset R$, значит, $D(f)$ состоит из двух промежутков.

Ответ: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

2. ЕГЭ. Найдите область определения функции

$$y = \log_{0,2} \underbrace{\frac{6-x}{6+2x}}_{f(x)}$$

Решение.

1) $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$

Дробь $\dfrac{p(x)}{t(x)}$ имеет смысл, если $t(x) \neq 0$

2) $6 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

3) $\dfrac{6-x}{6+2x} > 0$

$y = \log_{0,2} f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$

– + –

–3 6 x

Применим метод интервалов

$6 - x = 0,\ x = 6$

$6 + 2x \neq 0,\ x \neq -3$

4) $(-3; 6) \subset D(f)$

Ответ: $D(y) = (-3, 6)$.

Проверь себя!

Найдите $D(y)$.

1. $y = \log_6 \dfrac{2x+3}{1-x}$ 2. $y = \sqrt{6 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2}}$

Ответ: 1. $(-1,5; 1)$. 2. $D(y) = \left(-\infty; -1\right] \cup \left[\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$.

Полезный совет. Если функция состоит из комбинации нескольких функций, то $D(y)$ находите так:

1. Найдите область определения каждой функции, входящей в данную функцию.

2. Составьте систему из областей определения всех функций, входящих в заданную функцию, и решите ее; решение системы и есть $D(y)$.

3. Запишите ответ в форме промежутков.

Воспользуйтесь этим советом при решении такого примера.



Дана функция $y = 2\left(1 + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Найдите $D(y)$.

Решение.

1) Упростим выражение: $y=2\left(1+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{x-2}}}$

2) $\begin{cases}1+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{x-2}>0\\ \frac{x}{x-2}>0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{x-2}>-1\\ \frac{x}{x-2}>0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{x-2}>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\\ \frac{x}{x-2}>0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{x-2}>\log_{\frac{1}{3}}3\\ \frac{x}{x-2}>0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{x-2}<3\\ \frac{x}{x-2}>0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{x-2}-3<0\\ \frac{x}{x-2}>0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2(3-x)}{x-2}<0\ (\mathrm{I})\\ \frac{x}{x-2}>0\ (\mathrm{II})\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow x<0$ и $x>3$

$(a)^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}},\quad a>0$

$\dfrac{a}{b}$ существует, если $b\neq 0$

$\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ существует, если $f(x)>0$

$\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ существует, если $a>0$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ убывает, так как $0<a<1$, и если $\log_{\frac{1}{3}}m>\log_{\frac{1}{3}}n$, то $0<m<n$

$\dfrac{x}{x-2}-3=\dfrac{x-3(x-2)}{x-2}=$

$=\dfrac{x-3x+6}{x-2}=\dfrac{6-2x}{x-2}=$

$=\dfrac{2(3-x)}{x-2}$

Неравенства решайте, применив метод интервалов

Ответ: $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(3;\,+\infty)$.

§ 2 Множество значений функции

Определение. *Область значений функции $y = f(x)$ — это все множество чисел, которые принимает y.*

Область значений функции (или множество значений) обозначается $E(y)$.

Алгоритм 10 Нахождение $E(y)$ — множества значений функции

Вопрос нахождения множества значений для многих функций достаточно сложный, поэтому разберем алгоритм нахождения $E(y)$ для некоторых элементарных функций разными способами.

Способ I (для обратимых функций)

1. Решите уравнение $y = f(x)$ относительно x: $x = q(y)$.
2. Найдите область определения функции $D(q)$ и примите ее за $E(f)$ (см. обратные функции).
3. Запишите ответ в форме промежутков.



1. $y = kx$

1) Найдем x: $x = \frac{y}{k}$, $k \neq 0$

2) $D(x) = R$

3) $E(y) = D(x) = (-\infty; +\infty)$

2. $y = kx + b$

1) Найдем x: $x = \frac{y-b}{k}$, $k \neq 0$

2) $D(x) = R$

3) $E(y) = D(x) = (-\infty; +\infty)$

3. $y = \frac{k}{x}$; $x \neq 0$

1) Найдем x: $x = \frac{k}{y}$, $y \neq 0$

2) $D(x) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

3) $E(y) = D(x) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

4. $y = x^2$

Найдем $E(y)$ проще: $x^2 \geq 0$, значит, $y \geq 0$, или $E(y) = [0; +\infty)$

По алгоритму:

1) $x = +\sqrt{y}$

2) $D(x) = [0; +\infty)$

3) $E(y) = D(x) = [0; +\infty)$

5. $y = \log_a x$

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. 1) Найдем x: $x = a^y$

2) $D(x) = R$

3) $E(y) = D(x) = (-\infty; +\infty)$

6. $y = a^x$

$a > 0$, $a \neq 1$. 1) Найдем x: $x = \log_a y$

2) $D(x) = (0; +\infty)$

3) $E(y) = D(x) = (0; +\infty)$

Способ II (по определению функции)

Примеры

1. $y = \sin x$, $E(y) = [-1; 1]$

2. $y = \cos x$, $E(y) = [-1; 1]$

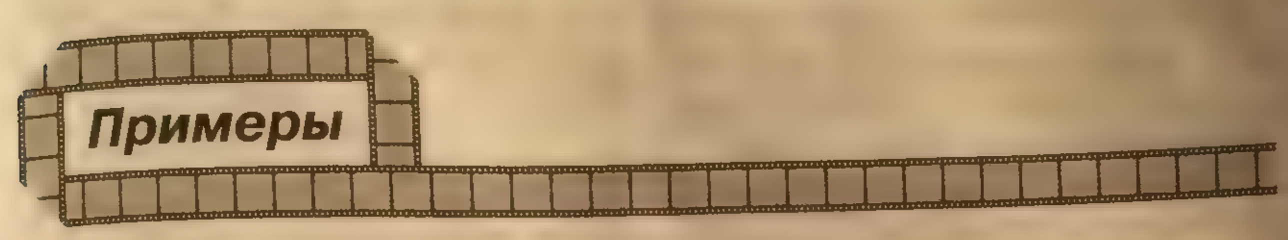
3. $y = \operatorname{tg} x$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$

4. $y = \operatorname{ctg} x$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$

5. $y = \arcsin x$, $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

6. $y = \arccos x$, $E(y) = [0; \pi]$

Способ III (вычислением)



1. Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 1$. Найдите $E(y)$.

Решение.

Определим вид параболы: $a = 2$, $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, значит, функция имеет наименьшее значение, $y_0 = f(x_0)$ — ордината вершины параболы (если $a < 0$, то функция имеет наибольшее значение, равное ординате вершины параболы).

$$x_0 = -\frac{b}{2a};\; x_0 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4};\; y_0 = c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8};\; y \geq -\frac{1}{8}$$

Ответ: $E(y) = \left[-\frac{1}{8};\; +\infty\right)$.

Полезный совет. Чтобы по заданному графику функции найти множество ее значений, надо спроектировать данный график на ось Oy и составить промежуток из значений ординат между ординатами крайних точек графика: отрезок $[a; b]$.

2. ЭМ. Функция задана графиком $y = f(x)$ (рис. 7). Найдите по графику: 1) $E(y)$; 2) при каких значениях x значения $f(x) < -1$.

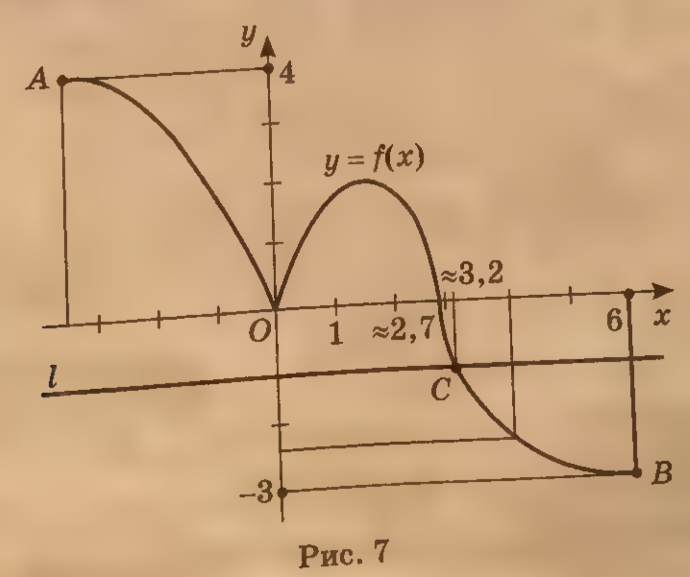


Рис. 7

Решение.

1) $E(y)$ — это множество значений y, поэтому из крайних точек A и B опустим перпендикуляры на ось Oy и найдем $E(y)$: $[-3; 4]$.

2) $f(x) < -1$. Найдем на оси Oy точку $(0; -1)$ и проведем через нее прямую l параллельно оси Ox.

Все значения $y < -1$ лежат на оси Oy ниже прямой l. Прямая l пересечет график в точке C. Опустим из точек C и B на ось Ox перпендикуляры и запишем промежуток значений x: $(\approx 3{,}2; 6]$. Ординаты точек графика при этих значениях x меньше -1.

Ответ: 1) $E(y) = [-3; 4]$; 2) $y < -1$ при x из промежутка $(\approx 3{,}2; 6]$.

3. Найдите множество значений функции $y = \frac{1}{2}\sin x \cos x - 1$.

Чтобы найти множество значений функции, обозначим y буквой a и решим уравнение относительно a; установим, при каких значениях a уравнение $\frac{1}{2}\sin x \cos x - 1 = a$ имеет корни.

Решение.

$\frac{1}{2}\sin x \cos x = a + 1$	$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$
$\frac{1}{4}\sin 2x = a + 1 \quad \vert \cdot 4$	$y = a$
$\sin 2x = 4a + 4$	$-1 \le \sin\alpha \le 1$
$-1 \le 4a + 4 \le 1 \quad \vert -4$	
$-5 \le 4a \le -3 \quad \vert :4$	
$-\frac{5}{4} \le a \le -\frac{3}{4}$	$a = y$

Ответ: $E(y) = [-1{,}25; -0{,}75]$.

4. ЕГЭ. Найдите множество значений функции $y = 2\cos x - 1$.

Приведем еще один прием решения; постепенными преобразованиями найдем границы, в которых заключено значение y.

Решение.

Значения косинуса составляют промежуток [–1; 1], значит:

$-1 \le \cos x \le 1 \ \Big| \cdot 2 \Leftrightarrow -2 \le 2\cos x \le 2 \ \Big| -1 \Leftrightarrow -3 \le \underbrace{2\cos x - 1}_{y} \le 1$

Получим $E(y) = [-3; 1]$

Ответ: $E(y) = [-3; 1]$.

5. ЕГЭ. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|}, \text{ если } x \ge -2$$

Решение.

1) Если $-2 \le x < 0$,

то $y = \dfrac{3x}{-x} + 2^{-x} \Leftrightarrow y = -3 + 2^{-x}$

$y(-2) = -3 + 2^2 = 1$

$-2 < y \le 1$

2) Если $x > 0$, то $y = 3 + 2^x$;

так как $2^x > 1$ при $x > 0$,

то $y > 4$

$D(y) = [-2; 0) \cup (0; +\infty)$

$x \ne 0$, так как $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл,

если $b \ne 0$

$|a| = -a$; если $a < 0$

$|a| = a$; если $a \ge 0$

$y(0) = -3 + 2^0 = -2$, но $x \ne 0$, то $y \ne -2$

Ответ: $E(y) = (-2; 1] \cup (4; +\infty)$.

Проверь себя!

Найдите $E(y)$.

1. $y = (x-1)^3$ 2. $y = \dfrac{3}{x-4}$ 3. $y = (x-1)^2$

Ответ: 1. $(-\infty; +\infty)$. 2. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. 3. $[0; +\infty)$.

Попробуй-ка реши!

ЕГЭ. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{5x}{|x|} + 3^{|x|}$, если $x \ge -1$.

Ответ: $(-4; -2] \cup (6; +\infty)$.

§ 3 Нули функции

Определение. *Нулями функции* $y = f(x)$ называются те значения $x \in D(f)$, при которых значение функции равно нулю: $f(x) = 0$.

Замечание. На координатной плоскости xOy нули функции изображаются точками графика, расположенными на оси Ox.

Алгоритм 11 Нахождение нулей функции $y = f(x)$

1. Найдите $D(y)$.
2. Решите уравнение $f(x) = 0$; если есть корни, то согласуйте их с $D(y)$; если уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней, то функция не имеет нулей, график не имеет общих точек с осью Ox.
3. Запишите ответ в виде чисел (корни уравнения $f(x) = 0$) или $\varnothing$.



ЕГЭ. Укажите промежуток, которому принадлежат нули функции

$$2 - \log_4(x+3) = \log_4(x+3)$$

1) $(-6; -4)$ 2) $(-4; -3)$ 3) $(-3; 4)$ 4) $(4; 6)$

Решение.

1) Найдем ОДЗ: $x > -3$ (предположительно может быть решением промежуток $(-3; 4)$ или $(4; 6)$)

| $\log_4 f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$ $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

2) Решим уравнение: $2 - \log_4(x+3) = \log_4(x+3)$

$2\log_4(x+3) = 2 \Leftrightarrow \log_4(x+3) = 1 \Leftrightarrow x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$

$1 \in (-3; 4)$

Ответ: номер верного ответа: 3.

З а м е ч а н и е. Нахождение нулей элементарных функций см. в теме «Построение графиков», а более сложных функций — в теме «Решение уравнений».

П о л е з н ы й с о в е т. Чтобы по графику найти нули функции, надо найти абсциссы общих точек графика с осью Ox.

Например: функция задана графиком (рис. 8), укажем множество значений функции и нули функции

1) $E(y) = [-3; 1]$

2) $x_0 = 3$ — нуль функции (абсцисса точки пересечения графика с осью Ox)

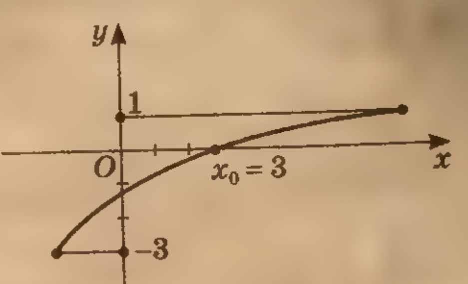


Рис. 8

Ответ: 1) $E(y) = [-3; 1]$; 2) 3.

Проверь себя!

Найдите нули функции.

1. $y = x^2 + 2x - 3$

2. $y = \frac{2}{3}x - 4$

3. $y = 7^x - 7^{x-1} - 6$

Ответ: 1. −3; 1. 2. 6. 3. 1.

§ 4 Четность, нечетность функции

Определение 1. Область определения функции $D(f)$ называется *симметричной относительно нуля*, если каждая пара значений $\pm x_0$ или входит в $D(f)$, или не входит в $D(f)$.

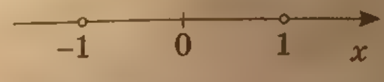
Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если: 1) ее область определения симметрична относительно нуля; 2) $f(-x) = f(x)$.

Определение 3. Функция называется *нечетной*, если: 1) ее область определения симметрична относительно нуля; 2) $f(-x) = -f(x)$.



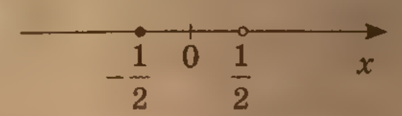
Определите, симметрична ли $D(y)$ относительно нуля для функций.

1. $y = \frac{2}{1-x^2}$; $x \neq \pm 1$



Ответ: $D(y)$ симметрична относительно нуля.

2. $y = \frac{5}{1-2x}$; $x \neq \frac{1}{2}$



Ответ: $D(y)$ не симметрична относительно нуля.

3. $y = \operatorname{tg} x$, $D(y) = \mathbf{R}$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Ответ: $D(y)$ симметрична относительно нуля.

Алгоритм 12 Определение четности и нечетности функции



1. Найдите $D(f)$ и определите, симметрична ли $D(f)$ относительно нуля. Если $D(f)$ не симметрична, то $y = f(x)$ не обладает свойством четности, нечетности.

   Например: $y = \sqrt{x}$; $D(f) = [0; +\infty)$ не симметрична, значит, функция $y = \sqrt{x}$ не обладает свойством четности, нечетности.

   Если $D(f)$ симметрична, то выполните п. 2.

2. Подставьте в функцию вместо x значение $(-x)$ и определите значение функции. Если $f(-x) = f(x)$, то $y = f(x)$ четная; если $f(-x) = -f(x)$, то $y = f(x)$ нечетная.

Внимание! $|-f(x)| = |f(x)|$ — модуль значения функции не меняется, меняться может только знак функции.

Например: $y = a^x$; $D(y) = (-\infty; +\infty)$ симметрична; $y(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $y(-x) \neq y(x)$; $\frac{1}{a^x} \neq a^x$, значение функции изменилось, значит, функция $y = a^x$ не обладает свойством четности и нечетности.

Графики четных и нечетных функций

График четной функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси Oy:

$$f(-x_0) = f(x_0) \text{ (рис. 9)}$$

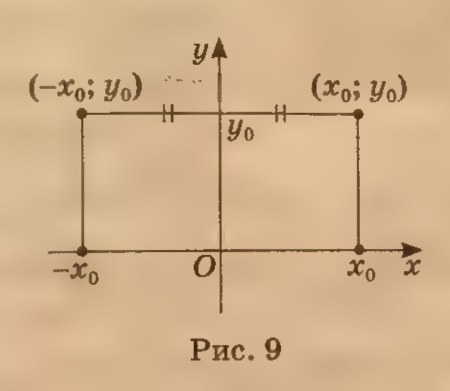


Рис. 9

График нечетной функции $y = f(x)$ симметричен относительно начала координат $O(0; 0)$:

$$f(-x) = -f(x) \text{ (рис. 10)}$$

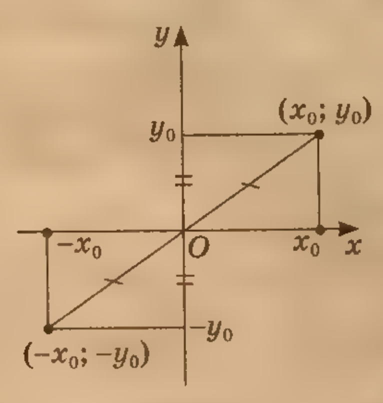


Рис. 10



1. Определите, является ли данная функция четной или нечетной:

$$y = \frac{x^3 + \sin 2x}{\cos x}$$

Решение.

1) $D(y) = \boldsymbol{R}$, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, симметрична относительно нуля.

2) $y(-x) = \frac{(-x)^3 + \sin 2(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-x^3 - \sin 2x}{\cos x} = -\frac{x^3 + \sin 2x}{\cos x} = -y(x)$

Ответ: функция нечетная.

2. Докажите, что функция $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ четная.

Решение.

1) $D(f)=[-1;\ 1]$ симметрична относительно 0 | $1-x^2\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

2) $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$, значит, данная функция четная

3. ЕГЭ. Укажите график четной и нечетной функции (рис. 11).

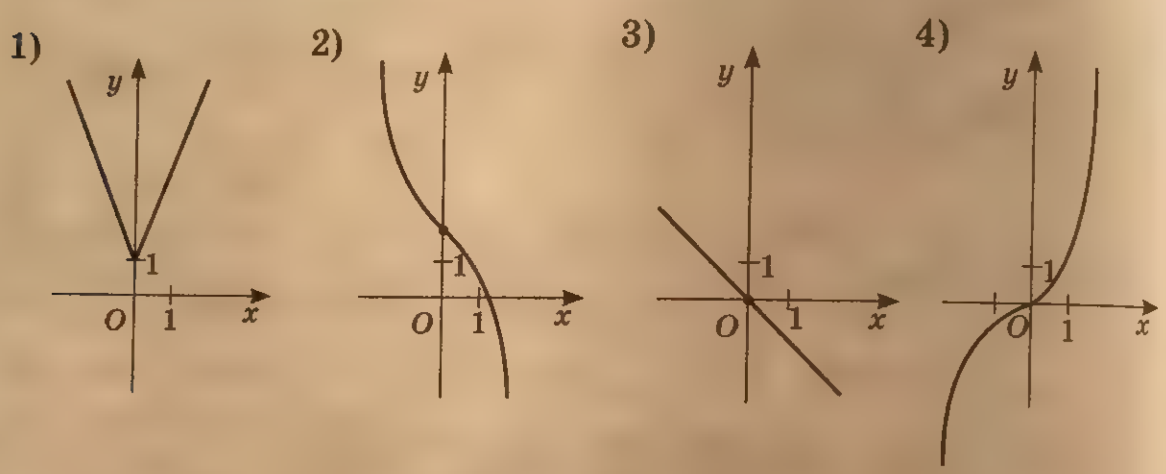


Рис. 11

Ответ: 1) четная; 3), 4) нечетная.

Замечание. Сумма и разность двух четных функций есть функция четная (проверьте).

Проверь себя!

Является ли функция четной или нечетной?

1. $y=x^2\cdot\cos 2x$

2. $y=x-\cos x$

3. $y=2^x+2^{-x}$

4. $y=\lg\dfrac{3+x}{3-x}$

Ответ: **1.** Четная. **2.** Не обладает свойством. **3.** Четная. **4.** Нечетная на промежутке $(-3;\ 3)$.

§ 5 Промежутки знакопостоянства функции

Определение. Промежутки значений x из $D(f)$, в которых $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$), называются *промежутками знакопостоянства функции* $f(x)$.

Алгоритм 13 Нахождение промежутков знакопостоянства функции

1. Найдите $D(f)$.
2. Найдите $E(f)$. Если $E(f) > 0$, то $y > 0$ на $D(f)$.
3. Приравняйте $f(x)$ нулю и решите уравнение $f(x) = 0$; если есть корни, то выполните п. 4.
4. На координатной прямой Ox укажите $D(f)$ и отметьте нули функции (п. 3). Область определения разобьется корнями функции на интервалы, в каждом из которых функция сохраняет знак. Для определения знака значений функции на интервале возьмите любую точку из интервала и подставьте ее значение в формулу функции.
5. Если корней нет, то решите неравенство $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ на $D(f)$.
6. Ответ запишите в виде $f(x) > 0$ при $x = ...$ и $f(x) < 0$ при $x = ...$.

Замечание. Определение знаков функции на промежутках рассматривается в теме «Неравенства».



Определите знаки функции.

1. $y = \log_2 x$ (рис. 12)

2. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (рис. 13)

Решение.

1) $D(y) = (0; +\infty)$

2) $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

3) $y > 0$ при $x > 1$

$y < 0$ при $0 < x < 1$

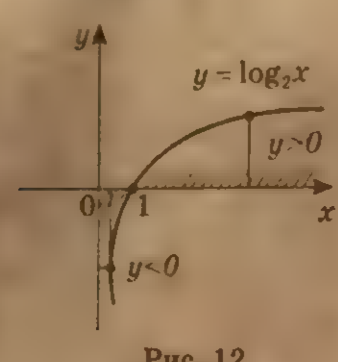


Рис. 12

Решение.

1) $D(y) = (0; +\infty)$

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

3) $y > 0$ при $0 < x < 1$

$y < 0$ при $x > 1$

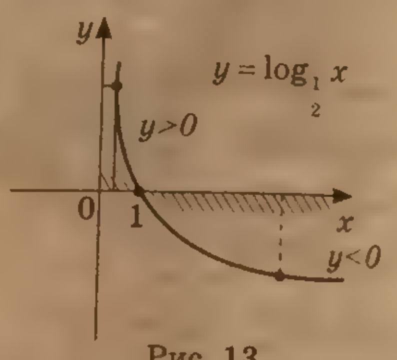


Рис. 13

Полезный совет. При сравнении чисел с 1 могут получиться два случая: $a > 1$ или $0 < a < 1$. Будем считать:

если $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$, то a и b имеют одинаковый характер

если $\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$, то a и b имеют разный характер

Если в равенстве $\log_a b = x$ число $x > 0$, то значения a и b имеют одинаковый характер, т. е. либо оба числа больше 1, либо оба меньше 1, но больше 0, и наоборот, если a и b одинаковые по характеру, то число $x > 0$. Аналогично для равенства $a^x = b$.

Например, определим знак выражения: а) $\log_{0,3} 0,5$; б) $\log_3 2$

а) $\log_{0,3} 0,5 > 0$

$\left.\begin{matrix} 0 < 0,3 < 1 \\ 0 < 0,5 < 1 \end{matrix}\right\}$ a и b одного характера, значит, $\log_a b > 0$

б) $\log_3 2 > 0$

$\left.\begin{matrix} 3 > 1 \\ 2 > 1 \end{matrix}\right\}$ a и b одного характера, значит, $\log_a b > 0$

Если в равенстве $a^x = b$ число $x < 0$, то a и b имеют разный характер, т. е. одно число больше 1, другое меньше 1, но больше 0, и наобо-

рот, если a и b разные по характеру, то число $x < 0$. Аналогично для равенства $\log_a b = x$.

Например, сравним с 1: а) $0{,}5^{-3}$; б) $2^{0{,}5}$; в) $0{,}4^{0{,}2}$

а) $\underbrace{\underbrace{0{,}5}_{a}{}^{\overbrace{-3}^{x}}}_{b} > 1$

$a^x = b$

$x = -3$; если $x < 0$, то a и b разного характера:

$a = 0{,}5$ $(0 < a < 1)$, значит, $b > 1$

б) $\underbrace{\underbrace{2}_{a}{}^{\overbrace{0{,}5}^{x}}}_{b} > 1$

$x = 0{,}5$, если $x > 0$, a и b одного характера и если $a = 2$ $(a > 1)$, то и $b > 1$

в) $\underbrace{\underbrace{0{,}4}_{a}{}^{\overbrace{0{,}2}^{x}}}_{b} < 1$

$x = 0{,}2$; если $x > 0$, и если $a = 0{,}4 < 1$, то b имеет тот же характер: $0 < b < 1$

Примеры

1. ЭМ. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 14).

Укажите, при каких значениях x значения $f(x) > 0$.

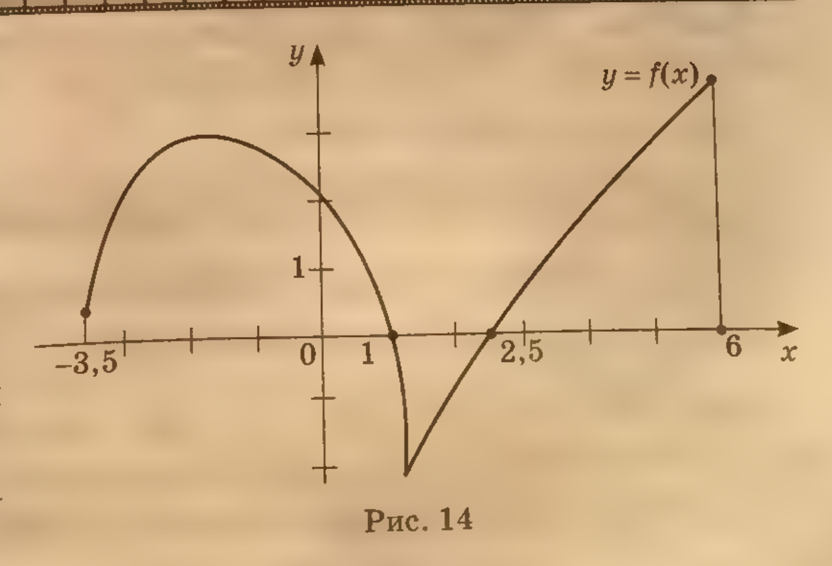


Рис. 14

Решение.

1) По графику найдем нули функции (это точки пересечения графика с осью Ox): $x_1 = 1$; $x_2 = 2{,}5$.

2) $y > 0$, если график функции расположен над осью Ox: $-3{,}5 \le x < 1$ и $2{,}5 < x \le 6$.

Ответ: $f(x) > 0$ при x из промежутков $[-3{,}5;\ 1)$ и $(2{,}5;\ 6]$.

2. Дана функция $y = -x^2 + 2x + 3$. Найдите промежутки значений x, при которых $y > 0$.

Решение.

1) $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$

2). Найдем нули функции:

$-x^2 + 2x + 3 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

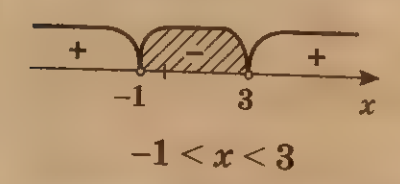
$x_1 = -1;\ x_2 = 3$

$-(x+1)(x-3) > 0 \mid \cdot(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)(x-3) < 0$

3) Найдем промежутки знакопостоянства функции методом интервалов:

$(x+1)(x-3) < 0$



$-1 < x < 3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

x_1, x_2 — корни

Алгоритм 53

Ответ: $y > 0$ на промежутке $(-1;\ 3)$.

Проверь себя!

Найдите, при каких значениях x значения $y > 0$.

1. $y = 2x - 5$

2. $y = \lg(2x - 3)$

Ответ: 1. $x > 2{,}5$. 2. $x > 2$.

§ 6 Возрастание и убывание функции

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на промежутке* J, если для любых x_1 и x_2 из J, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей на промежутке* J, если для любых x_1 и x_2 из J, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Иначе можно сказать, что функция возрастает (убывает) на промежутке J, если какие бы два значения аргумента из этого промежутка мы ни взяли, то большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Определение 3. Функция, которая в каком-нибудь промежутке только возрастает или только убывает, называется *монотонной* в этом промежутке.

Символически монотонность функции $y = f(x)$ можно записать так:

$$\left.\begin{matrix}\{x_1;\ x_2\} \subset J \\ x_2 > x_1 \quad \text{и} \\ f(x_2) > f(x_1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow y = f(x) \text{ возрастает на промежутке } J \ (J \subset D(f))$$

$$\left.\begin{matrix}\{x_1;\ x_2\} \subset J \\ x_2 > x_1 \quad \text{и} \\ f(x_2) < f(x_1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow y = f(x) \text{ убывает на промежутке } J \ (J \subset D(f))$$

Полезный совет. Чтобы определить монотонность функции по графику, достаточно установить направление графика при изменении значений x слева направо; если при этом график направлен вправо-вверх, то функция возрастает; если вправо-вниз, то функция убывает.



ЭМ. Определите по графику промежутки возрастания и убывания функции (рис. 15).

Решение.

1) Опустим перпендикуляры на ось Ox из точек A, B, C, D, P (из крайних точек и точек перехода от убывания к возрастанию и наоборот).

2) Запишем промежутки значений x, при которых функция убывает (график направлен вправо-вниз): $[-3; -1{,}5]$, $[-0{,}5; 2]$.

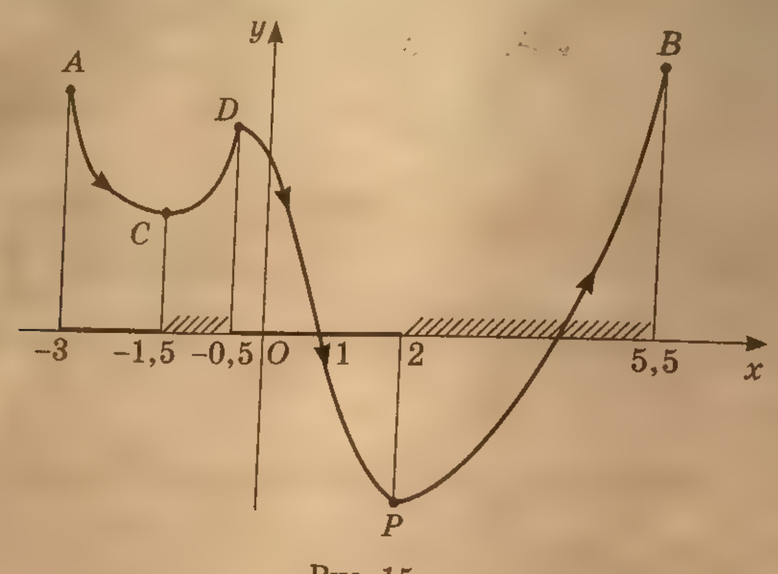


Рис. 15

3) Запишем промежутки значений x, при которых функция возрастает (график направлен вправо-вверх): $[-1{,}5; -0{,}5]$, $[2; 5{,}5]$.

Ответ: функция $y = f(x)$ возрастает на промежутках $[-1{,}5; -0{,}5]$, $[2; 5{,}5]$ и убывает на промежутках: $[-3; -1{,}5]$, $[-0{,}5; 2]$.

Замечание. Если функция определена на концах промежутка монотонности в точках a и b, то значения a и b включаем в промежуток монотонности $[a; b]$.

Между промежутками монотонности нельзя писать знак $\cup$ (операция объединения), промежутки необходимо перечислять, *например:* функция возрастает на промежутках $[a; b]$ и $[c; d]$, так как на общем промежутке $[a; d]$ функция не монотонная.

Алгоритм 14 Нахождение промежутков возрастания и убывания функции

1. Найдите $D(f)$ (или промежуток $J \subset D(f)$).
2. Возьмите два любых значения x_2 и x_1 из J ($x_2 > x_1$) и вычислите $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

3. Сравните $f(x_2)$ и $f(x_1)$ и сделайте вывод.
Если $f(x_2)-f(x_1)>0$, то $f(x_2)>f(x_1)$, значит, $y=f(x)$ возрастает на промежутке J. Если $f(x_2)-f(x_1)<0$, то $f(x_2)<f(x_1)$ — функция убывает на промежутке J.



Докажите, что функция $y=3^x$ возрастает на всей области определения.

Решение.

1) $D(y)=(-\infty; +\infty)$

2) Пусть $x_2 > x_1$;

$x_1, x_2 \in R$; $y_1 = 3^{x_1}$, $y_2 = 3^{x_2}$

3) Сравним 3^{x_2} и 3^{x_1}:

$3^{x_2} - 3^{x_1} = 3^{x_1}(3^{x_2-x_1} - 1) > 0$

$3^{x_2} > 3^{x_1}$, значит, $y=3^x$ возрастает на интервале $(-\infty; +\infty)$

$3^{x_1} > 0$; $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow$ (характер одинаковый)

$3^{x_2-x_1} > 1$; $3^{x_2-x_1} - 1 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 > x_1 \\ f(x_2) > f(x_1) \\ \{x_2, x_1\} \subset J \end{array}\right\} y=f(x) \text{ возрастает на } J$$

Проверь себя!

1. Докажите, что $y=0{,}2^x$ убывает на ее области определения.
2. Определите монотонность функций:

$$\text{а) } y=x^3;\ \text{б) } y=2x-1;\ \text{в) } y=\frac{1}{x} \text{ при } x>0$$

Ответ: 2. а) возрастает; б) возрастает; в) убывает.

§ 7 Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. *Наибольшим* (*наименьшим*) значением функции на ее области определения называется самое большее (меньшее) значение y из области значений функции.

Алгоритм 15 Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции

1. Найдите $E(y)$.

2. Если $E(y)$ — открытый промежуток, то функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Например: функции $y = kx$, $y = kx + b$, $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x^{2n+1}}$ $(n \in Z)$, $y = \frac{k}{x^{2n}}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$, $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{arcctg}x$ не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значения.

3. Если множество значений функции — закрытый луч, то $y(x_0)$ будет либо наименьшим, либо наибольшим значением функции (x_0 — абсцисса начала луча).

Например, найдем наибольшее (наименьшее) значение функции:

а) $y = \sqrt{x}$; $E(y) = [0; +\infty) \Rightarrow y = 0$ — наименьшее значение функции, наибольшего значения нет

б) $y = ax^2 + bx + c$

Если $a > 0$, то $E(y) = \left[f(-\frac{b}{2a}); +\infty\right)$; $y_0 = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ — наименьшее значение функции.

Если $a < 0$, то $E(y) = \left(-\infty; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$; $y_0 = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ — наибольшее значение функции.

y_0 — ордината вершины параболы

4. Если множество значений функции — отрезок $[a; b]$, то нижняя граница отрезка — наименьшее значение функции, а верхняя граница — наибольшее.

Например, найдем наибольшее (наименьшее) значение функции:

а) $y = \sin x$; $E(\sin x) = [-1; 1] \Rightarrow y_0 = -1$ — наименьшее значение; $y_0 = 1$ — наибольшее значение функции $y = \sin x$

б) $y = \arcsin x$; $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y_0 = -\frac{\pi}{2}$ — наименьшее значение; $y_0 = \frac{\pi}{2}$ — наибольшее значение функции $y = \arcsin x$

5. Чтобы найти по заданному графику на отрезке $[a; b]$ наибольшее (наименьшее) значение функции, надо спроектировать график на ось Oy, и ордината нижней точки на оси Oy — наименьшее значение функции, а ордината верхней точки на оси Oy — наибольшее значение функции.



1. ЭМ. Найдите по графику наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ (рис. 16).

Решение.

1) Спроектируем график на ось Oy, получим точки на оси Oy: $(0; -3)$ и $(0; 4{,}5)$.

2) Значение $y_0 = -3$ — наименьшее значение; $y_0 = 4{,}5$ — наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[-3; 6]$.

Ответ: $y(0) = 4{,}5$ — наибольшее значение функции, $y(6) = -3$ — наименьшее значение функции на отрезке $[-3; 6]$.

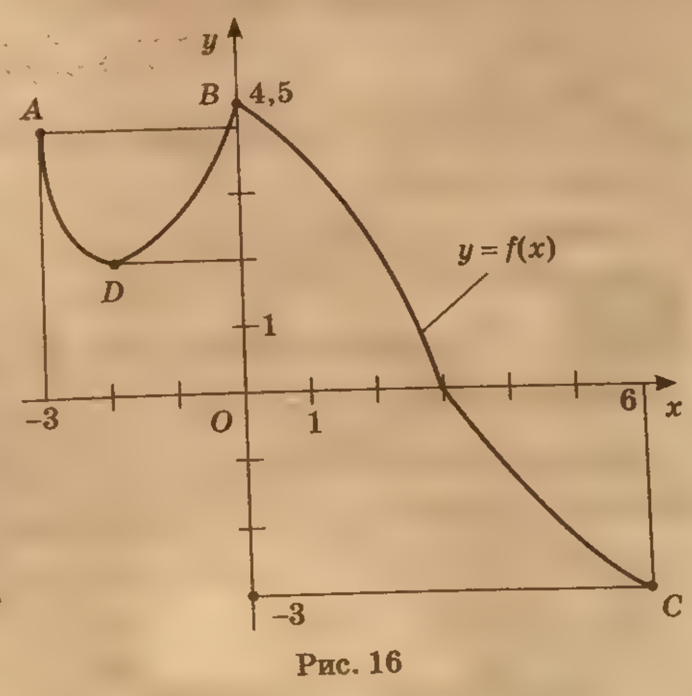


Рис. 16

2. ЕГЭ. Найдите наименьшее значение функции

$$q(x) = \log_{0,5}(0{,}25 - x^2)$$

Решение.

Функция $f(x)=0{,}25-x^2$ квадратичная, имеет наибольшее значение, равное 0,25. Точка (0; 0,25) — вершина параболы, ветви которой направлены вниз.

Функция $q(t)=\log_{0,5}t$ монотонно убывает, поэтому она имеет наименьшее значение при наибольшем значении аргумента.

$\log_{0,5}0{,}25 = 2$ — это и будет наименьшим значением данной функции.

$D(q)=(-0{,}5;\ 0{,}5)$, так как $\log_{0,5} b$ имеет смысл, если $b>0$

Решим неравенство:

$0{,}25-x^2>0$

$|x|<0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}5<x<0{,}5$

$y=\log_a f(x)$ убывает, если

$0<a<1; f(x)>0$

Ответ: 2.

Попробуй-ка реши!

1. **ЕГЭ.** Найдите наименьшее целое значение функции

$$y=\frac{9}{5}\sqrt{8\cos 2x-3\cos^2 x+24}$$

2. **ЕГЭ.** Найдите наименьшее значение функции $q(x)=\log_{0,5}(2-x^2)$.

Ответ: 1. 7. 2. –1.

§ 8 Периодичность функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если найдется такое число $T\neq 0$, что выполняются два условия:

1. Если $x_0\in D(f)$, то $(x_0+T)\in D(f)$ и $(x_0-T)\in D(f)$
2. $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Например: тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$ — периодические.

Среди нетригонометрических функций периодичностью обладает, например, функция $y=\{x\}$ — дробная часть числа. $T=1$ — наимень-

ший положительный период. Все числа Z, кроме 0, обладают свойством периода. $f(x_0+1)=f(x_0-1)=f(x_0)$ (рис. 17).

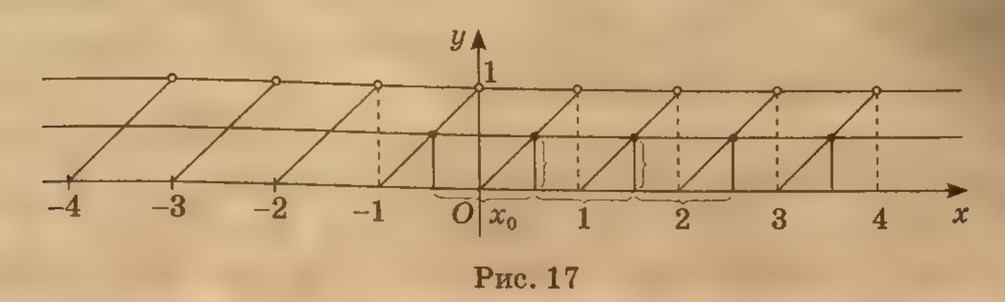


Рис. 17

Проверь себя!

Найдите наименьший положительный период функций.

1. $y=\cos 7x$ 2. $y=\sin\frac{x}{3}$ 3. $y=3\text{tg}\left(\frac{1}{4}x+1\right)$

4. $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{4}$

Ответ: 1. $T=\frac{2\pi}{7}$. 2. $T=6\pi$. 3. $T=4\pi$. 4. $T=8\pi$.

§ 9 Обратимость функции

Рассмотрим зависимость между элементами двух множеств X и Y (рис. 18).

Если каждому значению x из множества X соответствует единственное значение y из множества Y, то на множестве X задана функция $y=f(x)$. Ее область определения $D(y)=X$, а ее область значений $E(y)=Y$, и если каждому значению y из множества Y соответствует единственное значение x из множества X, то на множестве Y задана функция $x=q(y)$, причем $E(x)=X$.

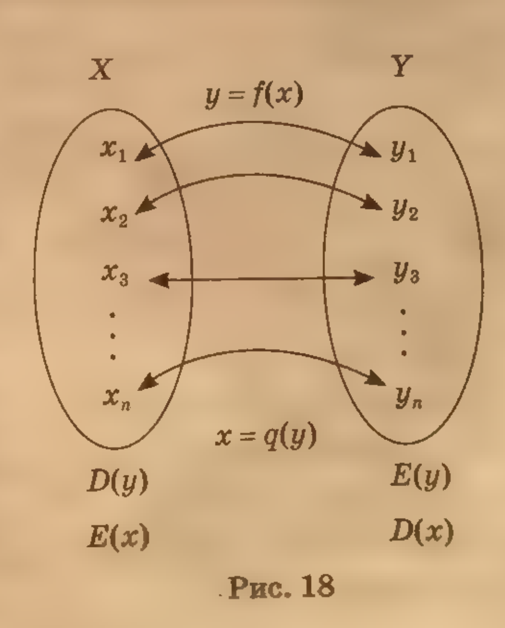


Рис. 18

Тогда говорят, что функция $x = q(y)$ — обратная функция к функции $y = f(x)$, а функция $y = f(x)$ *обратима*, т. е. *имеет обратную себе функцию.*

Итак, функции $y = f(x)$ и $x = q(y)$ называются взаимно обратными, если $D(f) = E(q)$ и $E(f) = D(q)$, $q(f(x)) = x$.

Условия обратимости функции

1. Функция $y = f(x)$ должна быть монотонной на промежутке J из $D(f)$.
2. Функция $y = f(x)$ должна быть непрерывной на промежутке J.
3. Для функции $y = f(x)$ на промежутке J должно выполняться условие: каждому значению y_0 соответствует единственный корень x_0 уравнения $f(x) = y_0$.

Вывод. Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела обратную функцию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\text{если } x_1 \neq x_2, \text{ то } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Например: рассмотрим график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с областью значений $[c; d]$ (рис. 19, *а*): $y_0 \in [c; d]$; $x_0 \in [a; b]$; $f(x_0) = y_0$; если значение x_0 единственное, то $y = f(x)$ обратима.

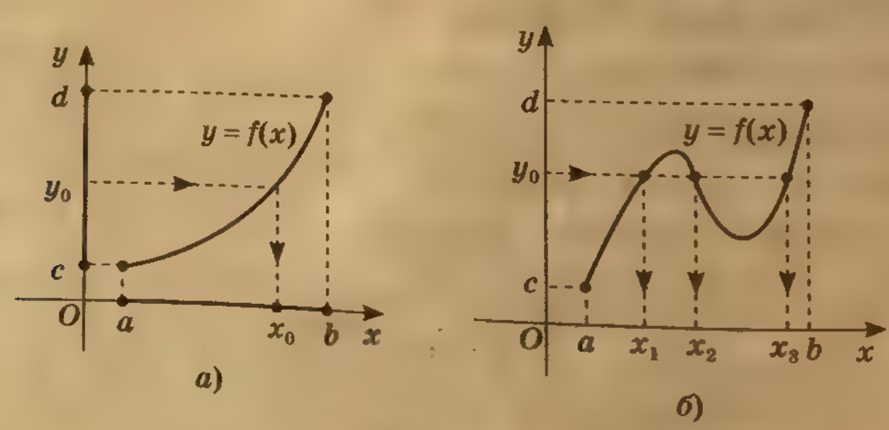


Рис. 19

Замечание. Если одному значению y_0 из отрезка $[c; d]$ соответствует более одного значения x (рис. 19, *б*) из отрезка $[a; b]$, то функция $y = f(x)$ необратима на отрезке $[a; b]$, при этом функция не монотонна на $[a; b]$.

Вывод. Если функция $y = f(x)$ определена и возрастает (или убывает) на некотором промежутке J из $D(f)$ и областью ее значений является промежуток Y из $E(f)$, то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (или убывает) на Y.

Алгоритм 16 Нахождение функции, обратной к данной функции $y = f(x)$

1. Найдите $D(f)$.
2. Выберите промежуток J из $D(f)$, где функция непрерывна и монотонна.
3. Решите уравнение $y = f(x)$ относительно x; если уравнение $f(x) = y$ имеет более чем один корень, то функции, обратной к функции $y = f(x)$, не существует; если корень единственный, то перейдите к п. 4.
4. Поменяйте местами x и y в полученном равенстве (п. 3), получите функцию, обратную данной.

Примеры взаимно обратных функций

I. Функции монотонные и непрерывные на всей их области определения, а значит, обратимые:

1. $y = kx$ $D(y) = R$; $x = \frac{y}{k}$, $k \neq 0$; $y = \frac{1}{k}x$ — функция, обратная к функции $y = kx$
2. $y = kx + b$ $D(y) = R$; $x = \frac{y-b}{k}$, $k \neq 0$; $y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$ — функция, обратная к функции $y = kx + b$
3. $y = ax^3$ $D(y) = R$; $x = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$; $y = \sqrt[3]{\frac{1}{a}x}$ — функция, обратная к функции $y = ax^3$
4. $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ $D(y) = R$; $x = \log_a y$; $y = \log_a x$ — функция, обратная к функции $y = a^x$
5. $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ $D(y) = (0; +\infty)$; $x = a^y$, $y = a^x$ — функция, обратная к функции $y = \log_a x$

II. Функции, непрерывные на области определения и имеющие неопределенность в точке:

1. $y=\dfrac{k}{x}$ $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$; $E(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$

Если $k>0$, то функция убывает на каждом интервале $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$, а значит, она обратима. При $k<0$ функция возрастает на каждом из этих интервалов, а значит, тоже обратима. $y=\dfrac{k}{x}$ — обратная к функции $y=\dfrac{k}{x}$. Получим, что $y=\dfrac{k}{x}$ — функция, обратная самой себе.

2. $y=\dfrac{1}{x^2}$ (рис. 20)

$D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$; $E(y)=(0;\,+\infty)$

На интервале $(-\infty;\,0)$ функция возрастает, а на интервале $(0;\,+\infty)$ функция убывает, значит, на всей $D(y)$ функция $y=\dfrac{1}{x^2}$ необратима.

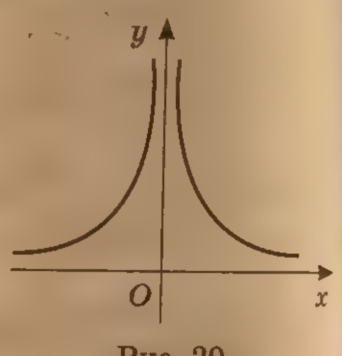
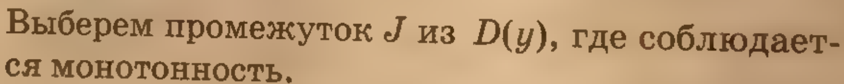


Рис. 20



Выберем промежуток J из $D(y)$, где соблюдается монотонность.

Пусть $J=(0;\,+\infty)$. Найдем x: $x=\sqrt{\dfrac{1}{y}}$, тогда $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ — обратная функция к функции $y=\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $J=(0;\,+\infty)$.

III. Функции, непрерывные на области определения, но не обладающие монотонностью на всей области определения:

$y=x^2$ (рис. 21)

$D(y)=(-\infty;\,+\infty)$. Выберем $J=[0;\,+\infty)$ из $D(y)$, где функция монотонно возрастает.

Найдем $x=\sqrt{y}$ и запишем $y=\sqrt{x}$ — функцию, обратную к данной функции $y=x^2$.

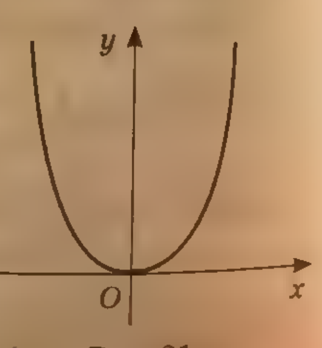


Рис. 21

З а м е ч а н и е. Можно выбрать промежуток $J=(-\infty;\,0]$, где функция $y=x^2$ убывает, тогда $y=-\sqrt{x}$ будет функцией, обратной к функции $y=x^2$.

Графики взаимно обратных функций

Если $y = f(x)$ и $x = q(y)$ — взаимно обратные функции, то $D(f) = E(q)$ и $E(f) = D(q)$, поэтому графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. прямой $y = x$.

Алгоритм 17. Построение графика функции, обратной к данной

1. Постройте график функции $y = f(x)$.
2. Выберите промежуток J из $D(f)$, где выполняется условие монотонности функции.
3. Постройте прямую $y = x$.
4. Постройте точки, симметричные точкам графика данной функции относительно прямой $y = x$, и соедините их линией. Это и будет график функции, обратной к данной.



1. Дана функция $y = x^2$. Постройте график функции, обратной к данной на промежутке $[0; +\infty)$.

Решение.

1) Построим график данной функции (рис. 22).

2) При $x \geq 0$ функция $y = x^2$ возрастает, непрерывна, следовательно, обратима.

3) Построим прямую $y = x$ (см. рис. 22).

4) Построим точки, симметричные точкам графика функции $y = x^2$ относительно прямой $y = x$, получим график функции $y = \sqrt{x}$, обратной к данной, на луче $[0; +\infty)$.

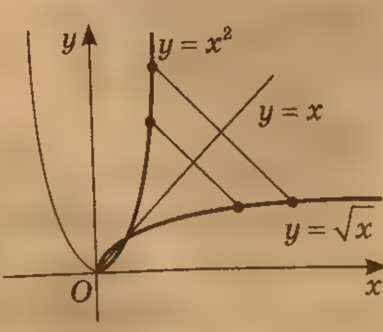


Рис. 22

2. Дана функция $y = a^x$. Постройте график обратной функции, если $a > 1$.

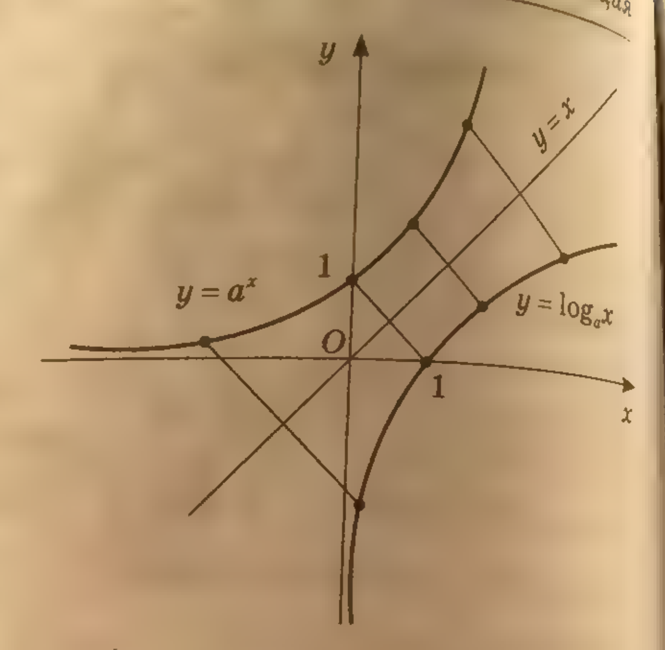


Рис. 23

Решение.

1) Построим график данной функции (рис. 23).

2) $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Функция $y = a^x$ возрастает, значит, она обратима.

3) Построим прямую $y = x$ (см. рис. 23).

4) Построим точки, симметричные точкам графика функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$, получим график функции $y = \log_a x$, обратной к данной.

3. На одном рисунке постройте график данной функции и функции, обратной к ней:

$$\text{а) } y = 3x - 2; \quad \text{б) } y = (x-1)^2 \text{ при } x \geq 1$$

Решение.

а) 1) Построим график функции $y = 3x - 2$ (рис. 24). На $D(y) = R$ функция возрастает ($k > 0$).

2) Проведем биссектрису $y = x$.

3) Построим точку, симметричную точке $(0; -2)$ относительно прямой $y = x$, вторую точку даст пересечение графиков функций $y = x$ и $y = 3x - 2$: $(1; 1)$.

4) Проведем прямую через эти две точки. Получим график функции $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, обратной к данной.

б) 1) $D(y) = [1; +\infty)$ — по условию. Построим график функции $y = (x-1)^2$ (рис. 25).

2) Функция возрастает на $D(y)$.

3) Построим биссектрису $y = x$.

4) Построим точку $(0; 1)$, симметричную точке $(1; 0)$ относительно прямой $y = x$, вторая точка — точка пересечения графика функции $y = (x-1)^2$ и прямой $y = x$; остальные точки возьмем удобные для построения.

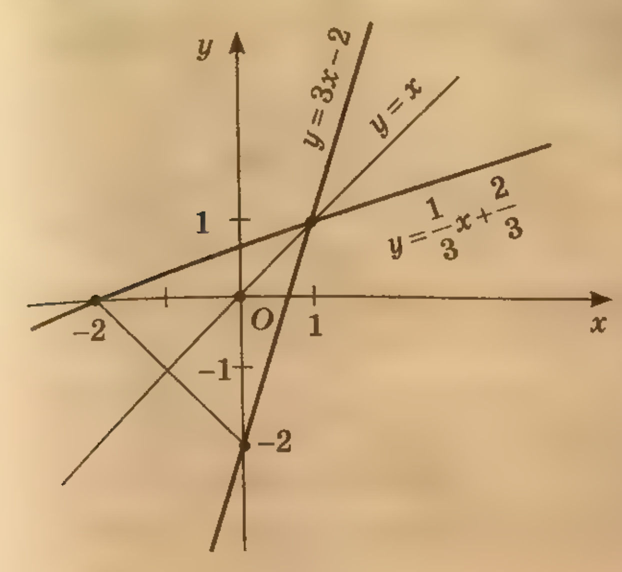


Рис. 24

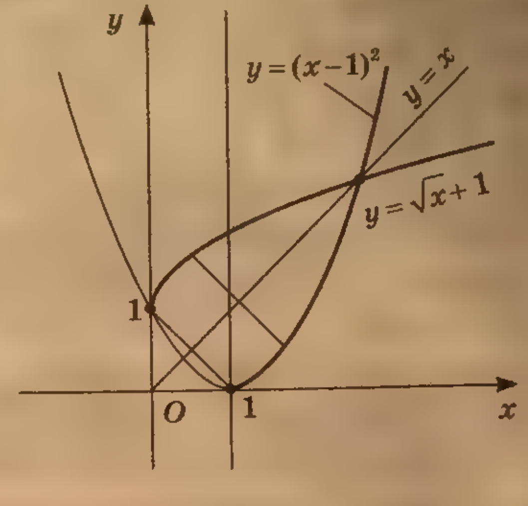


Рис. 25

Проверь себя!

Найдите функцию, обратную к данной.

1. $y=-5x+2$ 2. $y=x^3-2$ 3. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

Постройте графики обратных функций на одном рисунке с графиком данной функции.

Ответ: 1. $y=\frac{2-x}{5}$. 2. $y=\sqrt[3]{x+2}$. 3. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

§ 10 Графики элементарных функций

Определение 1. *Абсциссой и ординатой точки* называются *числа* положительные, если проекция точки на положительном направлении оси, и отрицательные, если проекция точки на отрицательном направлении оси.

Определение 2. *График функции* $y=f(x)$ — это множество точек координатной плоскости, абсциссы которых — значения аргумента x, а ординаты — значения функции y.

График может быть точкой (множеством точек), линией, в частности отрезком (отрезками), прямой, дугой, лучом и т. д. Координаты

точек графика функции обладают общим свойством, которое обычно записывают формулой.

Чтобы построить график функции, надо уметь строить точки по их координатам. Для этого надо на оси Ox отложить значение x_0, на оси Oy — значение y_0 и провести перпендикуляры к осям до их пересечения; получим точку $A(x_0; y_0)$.

Знаки координат точек по четвертям представлены на рис. 26.

Например: точка $A(-2; 3)$ лежит во II четверти.

Чтобы *определить, лежит ли точка $A(x_0; y_0)$ на графике* данной функции, заданной формулой $y = f(x)$, надо подставить координаты точки x_0 и y_0 вместо x и y в формулу функции. Если получится верное равенство, то точка $A(x_0; y_0)$ лежит на графике; если равенство неверное, то точка $A(x_0; y_0)$ не лежит на графике.

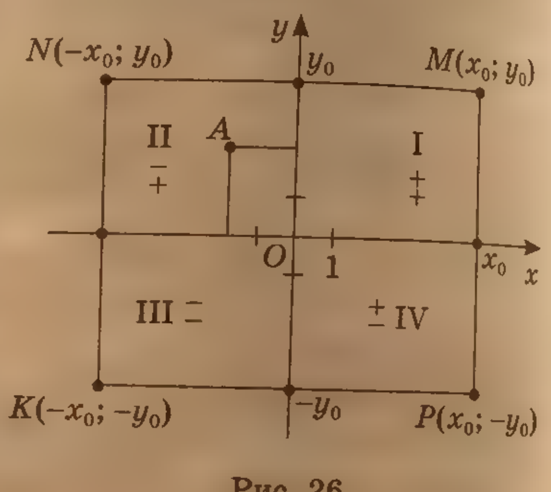


Рис. 26

Алгоритм 18 Общая схема построения графиков элементарных функций

1. Найдите $D(f)$ — область определения функции (см. алгоритмы 7—9).
2. Найдите $E(f)$ — множество значений функции (см. алгоритм 10).
3. Определите четность или нечетность функции (симметрию графика, см. алгоритм 12).
4. Найдите нули функции (точки пересечения или касания графика с осью Ox, решите уравнение $f(x) = 0$, см. алгоритм 11).
5. Найдите точки пересечения графика функции с осью Oy ($x = 0$).
6. Составьте таблицу значений, т. е. задайте несколько значений аргумента x_k из $D(f)$ и найдите для них значения функции $y = f(x_k)$.
7. Постройте точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ... в системе координат xOy и соедините их линией (линиями) с учетом п. 1—4, получите график функции.

x	x_0	x_1	x_2	...
y	y_0	y_1	y_2	...

Замечание. Построение графиков, состоящих из комбинации элементарных функций, изучается в 11-м классе. Остальные свойства функций см. в таблице «Свойства функций» (с. 536—541).

Алгоритм 19 Построение графика функции $y = kx$

1. Найдите $D(f)$: $x \in R$
2. Найдите $E(f)$: $y \in R$
3. Установите четность (нечетность) функции: $y(-x) = k \cdot (-x) = -kx = -y(x)$, следовательно, $y = kx$ — нечетная функция, график симметричен относительно начала координат $O(0; 0)$.
4. Найдите нули функции: $y = 0 \Rightarrow kx = 0$, $k \neq 0$, тогда $x = 0$; значит, точка $O(0; 0)$ — начало координат — общая точка для всех прямых, заданных формулой $y = kx$, где k — постоянная, $k \neq 0$.
5. Возьмите любое «удобное» значение x_0, найдите $y(x_0)$ и постройте точку $A(x_0; y_0)$.
6. Проведите прямую AO, получите график функции $y = kx$. Функцию $y = kx$ называют *прямой пропорциональностью* при $k \neq 0$.

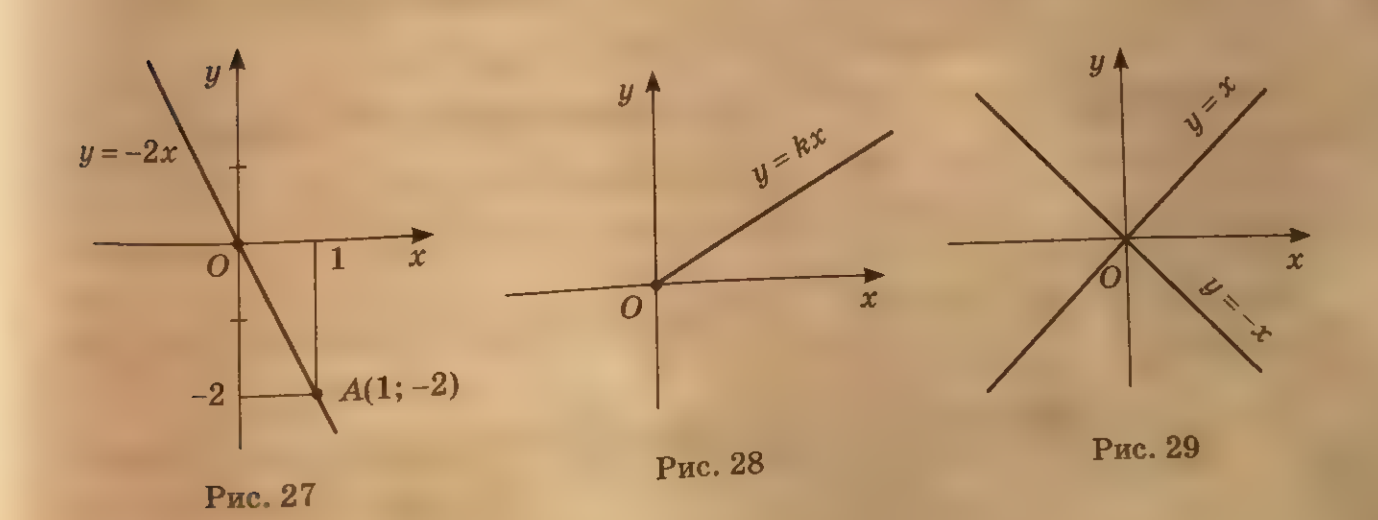


Рис. 27

Рис. 28

Рис. 29

Вывод. Для построения прямой $y = kx$ достаточно двух точек: $O(0; 0)$ и любой точки $A(x_0; y_0)$.



Постройте график функции $y = -2x$.

Решение.

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$

3) График симметричен относительно $O(0; 0)$.

4) Прямая пройдет через точку $O(0; 0)$.

5) Найдем координаты еще одной точки $A(x_0; y_0)$. Пусть $x_0 = 1$, тогда $y_0 = -2 \cdot 1 = -2$, получим точку $A(1; -2)$.

6) Проведем прямую AO, получим график функции $y = -2x$ (рис. 27).

При $k > 0$ и $x \geq 0$ график функции $y = kx$ — луч, расположенный в I четверти (рис. 28). Эта функция часто используется в практической деятельности (*например*, в физике: $s = v \cdot t$, $v > 0$, $t \geq 0$). Если $k = 1$ или $k = -1$, то графиками функций $y = x$ и $y = -x$ будут биссектрисы I, III и II, IV координатных углов соответственно (рис. 29).

Геометрический смысл коэффициента k функции $y = kx$

В функции $y = kx$ число k — угловой коэффициент прямой.

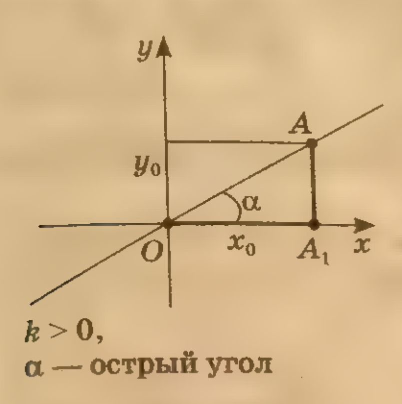
$k = \dfrac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox.

Если $k > 0$, то $0 < \alpha < 90°$ (рис. 30)

$\Delta AOA_1:\ k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_0}{x_0} > 0$

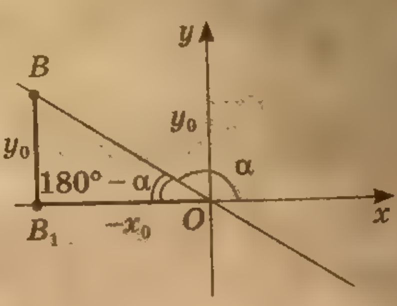
Если $k < 0$, то $90° < \alpha < 180°$ (рис. 31)

$\Delta BOB_1:\ k = \dfrac{y_0}{-x_0} = \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha < 0$



$k > 0$,
α — острый угол

Рис. 30



$k < 0$,
α — тупой угол

Рис. 31

График $y = kx$ лежит в I и III четвертях.

При $k > 0$ функция $y = kx$ возрастает (см. рис. 30).

График $y = kx$ лежит во II и IV четвертях.

При $k < 0$ функция $y = kx$ убывает (см. рис. 31).

Замечание. Чем меньше $|k|$, тем график ближе к оси Ox.



Постройте графики функций $y = \frac{1}{4}x$, $y = 2x$, $y = -\frac{1}{2}x$.

Решение.

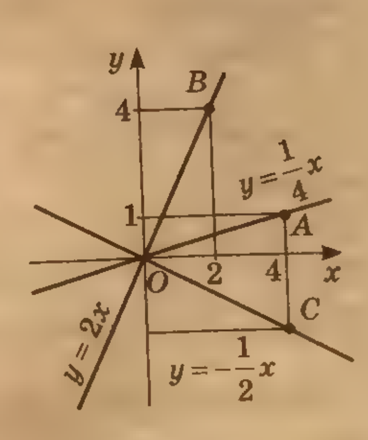


Рис. 32

График каждой из функций проходит через точку $O(0; 0)$. Найдем вторую точку для каждого графика.

Для $y = \frac{1}{4}x$ точка $A(4; 1)$, для $y = 2x$ точка $B(2; 4)$, для $y = -\frac{1}{2}x$ точка $A(4; -2)$.

Построим графики этих функций в одной системе координат (рис. 32).

Построение графика функции $y = kx + b$

Функцию $y = kx + b$ называют *линейной*.

Для построения прямой $y = kx + b$ достаточно двух точек пересечения ее с осями.

Точка $A(0;\ b)$ лежит на оси Oy, точка $B\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$ — на оси Ox (рис. 33).

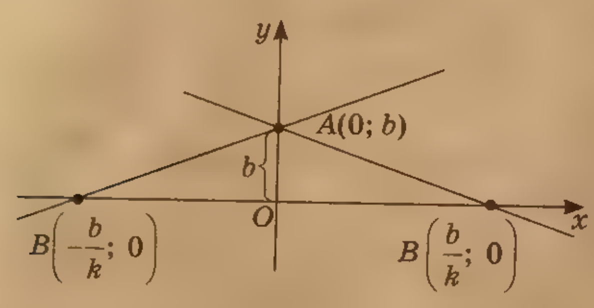
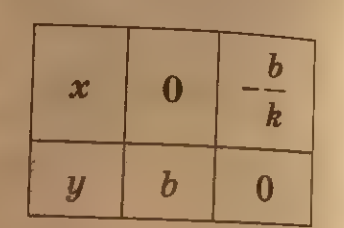


Рис. 33



x	0	$-\frac{b}{k}$
y	b	0

Замечание. Если число $-\frac{b}{k}$ мало́, то возьмите любое «удобное» значение x_0, найдите $y(x_0)$ и проведите прямую через точки $A(0;\ b)$ и $C(x_0;\ y(x_0))$ (рис. 34).

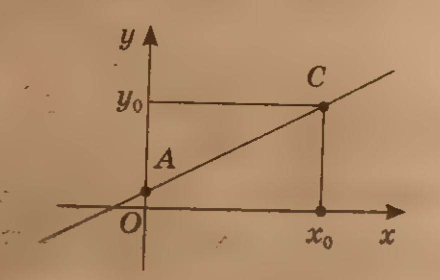


Рис. 34

Полезный совет. При построении графиков функций $y = kx$ и $y = kx + b$ учитывайте, что это — параллельные прямые, так как у них одинаковый угловой коэффициент k. Поэтому можно построить график функции $y = kx$ и через точку $(0;\ b)$ провести прямую, параллельную прямой $y = kx$, получите график функции $y = kx + b$ (рис. 35). Функция $y = kx$ — частный случай функции $y = kx + b$ при $b = 0$.

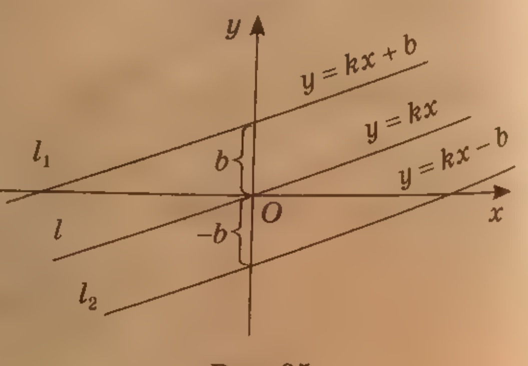


Рис. 35

Внимание! Если $l_1 \parallel l_2$, то $k_{l_1} = k_{l_2}$, и, наоборот, если $k_{l_1} = k_{l_2}$, то $l_1 \parallel l_2$, если $k_{l_1} \neq k_{l_2}$, то l_1 пересечет l_2.



Постройте графики функций $y = 3x - 1$, $y = -2x - 4$, $y = x - 4$. Проверьте, какому графику принадлежит точка $A(-4; 4)$.

Решение.

1) Построим график функции $y = 3x - 1$ (рис. 36). Для построения удобнее взять точку $A(0; -1)$ на оси Oy и точку $B(1; 2)$. Если взять $y = 0$, то $x = \frac{1}{3}$ — эту точку неудобно строить.

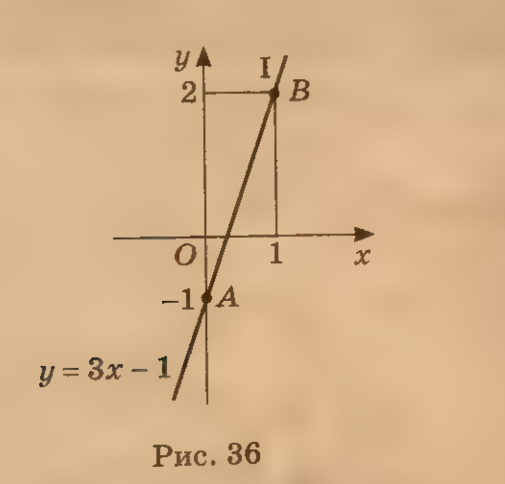


Рис. 36

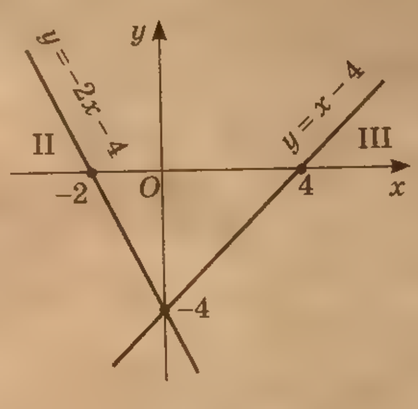


Рис. 37

2) Построим графики функций $y = -2x - 4$ и $y = x - 4$ (рис. 37).

3) Проверим, какому графику принадлежит точка $A(-4; 4)$. Для этого подставим в формулу каждой функции значения $x = -4$ и $y = 4$:

$y = 3x - 1$ (I)
$4 \neq 3 \cdot (-4) - 1$
точка $A(-4; 4)$
не лежит на графике I

$y = -2x - 4$ (II)
$4 = -2 \cdot (-4) - 4$
точка $A(-4; 4)$
лежит на графике II

$y = x - 4$ (III)
$4 \neq -4 - 4$
точка $A(-4; 4)$
не лежит на графике III

Замечания

1. Если $k_1 \neq k_2$, то графики, построенные в одной системе Oxy, имеют единственную общую точку — точку пересечения.

2. Можно брать любые две точки $(x_0;\ y(x_0))$ и $(x_1;\ y(x_1))$ и строить прямую $y = kx \quad b$, но рациональнее прямую строить через точки пересечения ее с осями.

Внимание! Если дана функция $y = kx \quad b$, где $k = 0$ $(\alpha = 0°)$, то $y = b$ — это прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0; b)$.

Если $\alpha = 90°$, то имеем прямую $(x = a)$, параллельную оси Oy, проходящую через точку $(a; 0)$.

Если $b = 0$, то $y = 0$ — уравнение оси Ox. Если $a = 0$, то $x = 0$ — уравнение оси Oy.



Постройте прямые.

1. $y = 2$ и $y = -3$

2. $x = 1$ и $x = -2$

Решение. См. на рисунках 38 и 39.

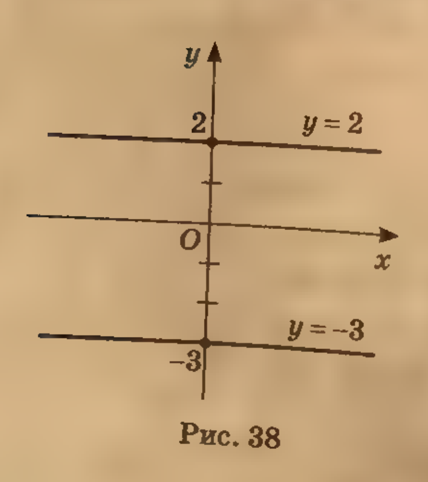


Рис. 38

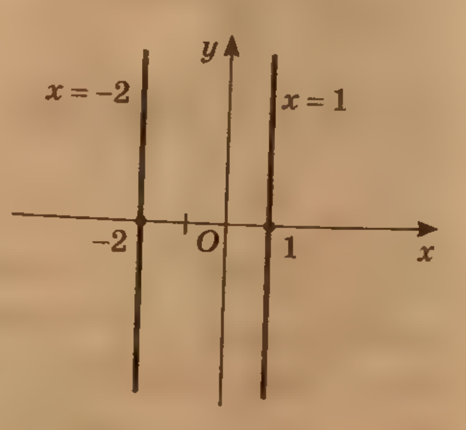


Рис. 39

Функция $y = \dfrac{1}{x}$

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ называется *обратной пропорциональной зависимостью*, ее график называется *гиперболой*, график состоит из двух ветвей.

Алгоритм 20. Построение графика функции $y=\dfrac{1}{x}$

1. $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$
2. $E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$
3. Четность (нечетность) функции: $y(-x)=\dfrac{1}{-x}=-y(x)\Rightarrow y=\dfrac{1}{x}$ — нечетная функция. График симметричен относительно точки $O(0;\ 0)$.
4. Нули функции: $y=0$, $\dfrac{1}{x}\neq 0$. Нет нулей и нет точек пересечения с осью Ox.
5. Точки пересечения с осью Oy: $x\neq 0$ $(D(f))$. Нет точек пересечения с осью Oy.
6. Задайте несколько значений функции при $x>0$ (удобных для вычисления).

x	x_0	x_1	x_2
y	$\dfrac{1}{x_0}$	$\dfrac{1}{x_1}$	$\dfrac{1}{x_2}$

7. Постройте точки $\left(x_0;\ \dfrac{1}{x_0}\right)$, $\left(x_1;\ \dfrac{1}{x_1}\right)$, ... и соедините их плавной линией.
8. Постройте точки, симметричные данным точкам (п. 7) относительно начала координат $O(0;\ 0)$, используя нечетность функции (п. 3): $\left(-x_0;\ -\dfrac{1}{x_0}\right)$, $\left(-x_1;\ -\dfrac{1}{x_1}\right)$...; соедините их плавной линией, получите график функции — гиперболу (рис. 40).

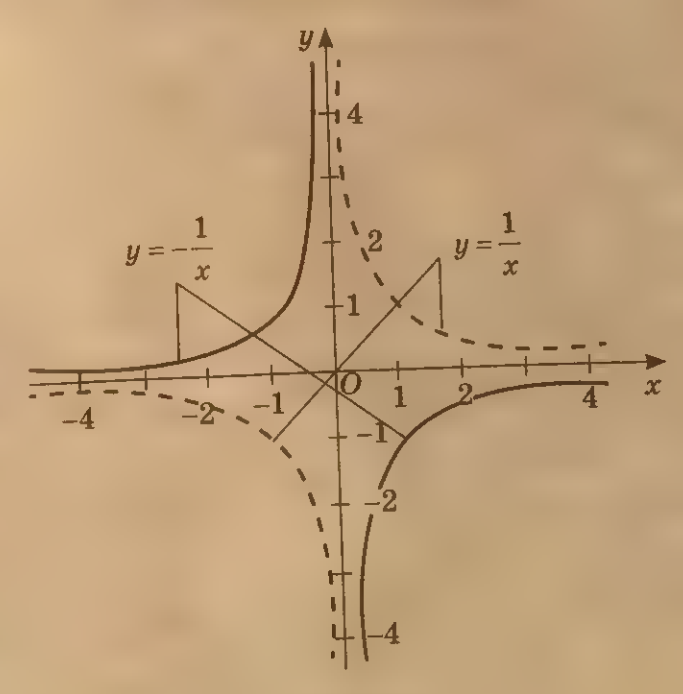


Рис. 40

9. Если дана функция $y = -\frac{1}{x}$, то ее график расположен во II и IV четвертях (см. рис. 40).

Замечание. Построение графика функции $y = \frac{k}{x}$ выполняется по алгоритму 20, при этом все значения функции $\frac{1}{x}$ умножаются на число k.

Если $k > 0$, то гипербола расположена в I и III четвертях симметрично относительно $O(0; 0)$; если $k < 0$, то гипербола расположена во II и IV четвертях. Ветви ее бесконечно приближаются к осям координат (оси Ox и Oy — асимптоты) (рис. 41).



Постройте график функции.

1. $y = -\frac{2}{x}$ **2.** $y = \frac{4}{x}$

Выполните задание самостоятельно и сравните с рисунками 41 и 42.

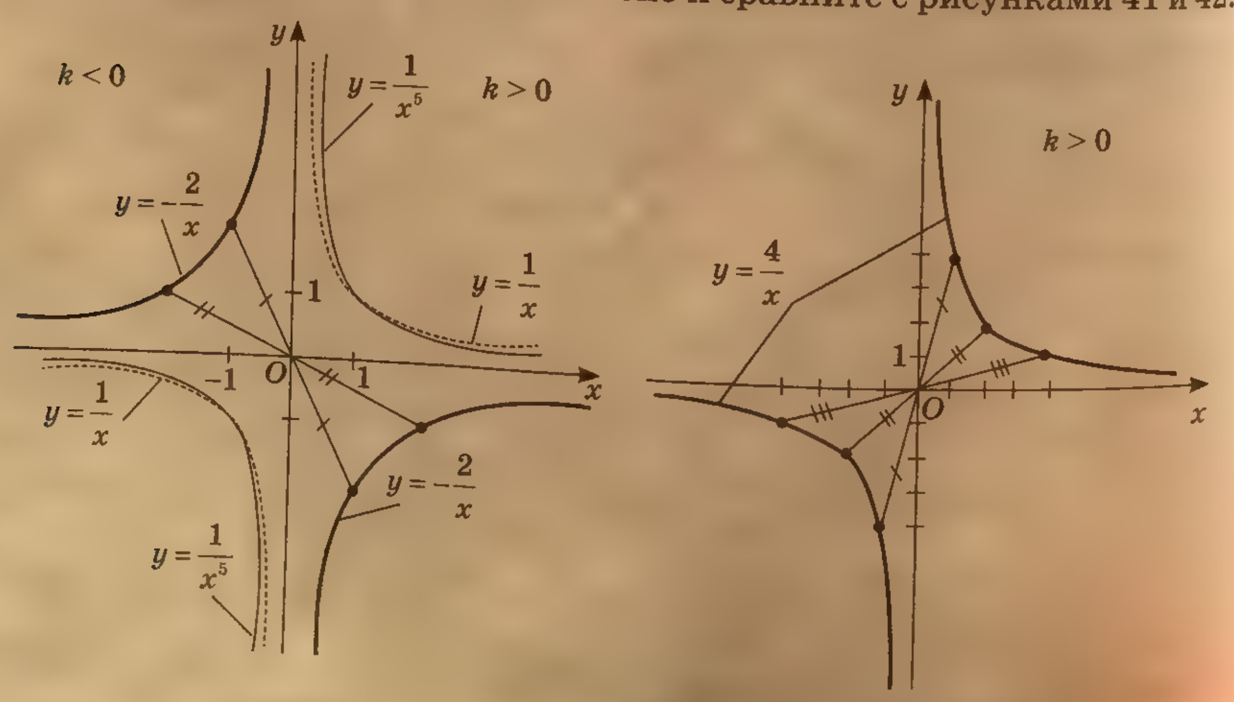


Рис. 41

Рис. 42

П о л е з н ы й с о в е т. Строя эскизы графиков функций $y=\frac{1}{x^3}$, $y=\frac{1}{x^5}$, $y=\frac{1}{x^{2n+1}}$, помните, что они имеют вид графика $y=\frac{1}{x}$ и чем больше n, тем график ближе к оси Ox при $|x|>1$ (по сравнению с графиком функции $y=\frac{1}{x}$) и дальше от оси Oy при $|x|<1$ (см. рис. 41).

Построение графика функции $y=\frac{1}{x^2}$

Построение графика функции $y=\frac{1}{x^2}$ выполняется по алгоритму 20 с учетом того, что эта функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy и расположен в I и II четвертях.



Постройте график функции.

1. $y=\frac{1}{x^2}$

2. $y=-\frac{1}{x^2}$

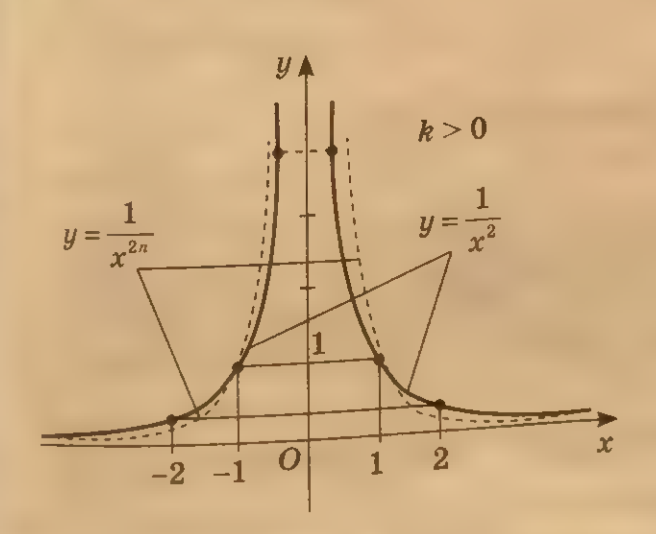


Рис. 43

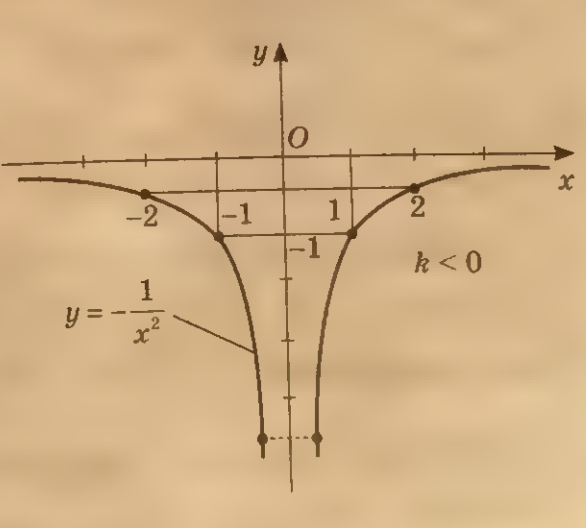


Рис. 44

Решение.

1. $y = \frac{1}{x^2}$

1) $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$
2) $E(y) = (0;\ +\infty)$
3) Составим таблицу значений.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

2. $y = -\frac{1}{x^2}$

1) $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$
2) $E(y) = (-\infty;\ 0)$
3) Составим таблицу значений.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$

Построим эти точки в системе xOy, затем точки, им симметричные относительно оси Oy, соединим их плавной линией, получим нужные графики (рис. 43, 44).

З а м е ч а н и е. Если дана функция $y = \frac{k}{x^2}$, то при $k > 0$ график расположен в I и II четвертях ($y > 0$) (рис. 43); при $k < 0$ график расположен в III и IV четвертях ($y < 0$) (рис. 44).

П о л е з н ы й с о в е т. Графики функций $y = \frac{1}{x^4}$, $y = \frac{1}{x^6}$, ..., $y = \frac{1}{x^{2n}}$, $x \neq 0$, имеют вид графика $y = \frac{1}{x^2}$; для построения эскиза графика $y = \frac{1}{x^{2n}}$ достаточно построить график функции $y = \frac{1}{x^2}$ и изобразить график $y = \frac{1}{x^{2n}}$ ниже графика $y = \frac{1}{x^2}$ при $|x| > 1$ и дальше от оси Oy при $|x| < 1$ по отношению к графику $y = \frac{1}{x^2}$ (см. рис. 43).

Алгоритм 21. Построение графика функции $y = x^3$

График функции $y = x^3$ называется кубической параболой.

1. $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$

2. $E(y) = (-\infty;\ +\infty)$

3. Четность (нечетность) функции: $y(-x) = (-x)^3 = -y(x)$, значит, $y = x^3$ — нечетная функция, ее график симметричен относительно начала координат — точки $O(0; 0)$.
4. Нули функции: $y = 0$; $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, и, значит, график пересекает оси Ox и Oy в точке $O(0; 0)$, т. е. проходит через начало координат.
5. Составьте таблицу значений для $x > 0$.

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = x^3$	$\frac{1}{8}$	1	8

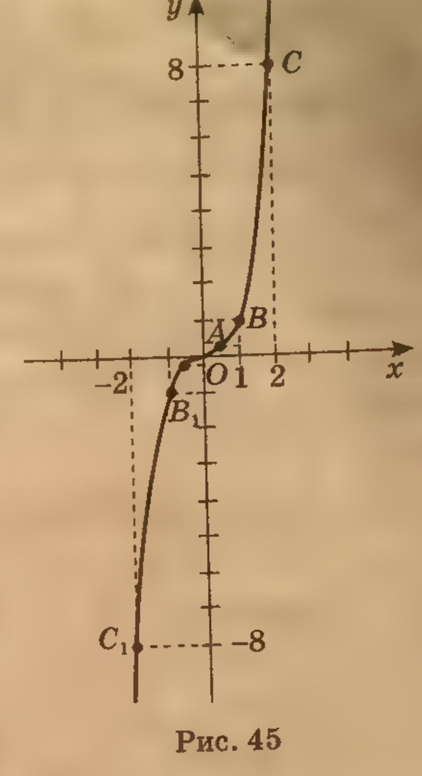


Рис. 45

6. Постройте точки $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$, $B(1; 1)$, $C(2; 8)$ (в I четверти).
7. Используя симметрию точек графика относительно начала координат (п. 3), постройте в III четверти точки $A_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$, $B_1(-1; -1)$, $C_1(-2; -8)$, симметричные точкам A, B, C.
8. Соедините точки плавной кривой и продолжите ветви графика вверх в I четверти и вниз в III четверти, получите кубическую параболу (рис. 45).

З а м е ч а н и е. Чтобы построить график функции $y = ax^3$, надо построить точки с координатами $(x_0; ax_0^3)$, $(x_1; ax_1^3)$, $(x_2; ax_2^3)$ и т. д. и соединить их плавной кривой.

Если $a > 0$, то график $y = ax^3$ расположен в I и III четвертях, функция возрастает. Если $a < 0$, то график расположен во II и IV четвертях, функция убывает. Чем больше $|a|$, тем график ближе к оси Oy; чем меньше $|a|$, тем график ближе к оси Ox (рис. 46, *а*).

П о л е з н ы й с о в е т. Чтобы построить эскиз графика функций $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^{2k+1}$, надо построить график функции $y = x^3$ и при $|x| < 1$ изобразить график функции $y = x^{2k+1}$ ближе к оси Ox, а при

$|x| > 1$ — ближе к оси Oy относительно графика функции $y = x^3$ (рис. 46, *б*).

Графики функций $y = x^{2k+1}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, имеют вид графика $y = x^3$ и проходят через точки (0; 0), (1; 1) и (−1; −1) (см. рис. 46, *б*).

Замечание. Удобно все значения x и y для функции $y = x^3$ занести в одну таблицу и строить симметричные точки относительно начала координат, для более точного построения графика потребуется большее количество точек.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = x^3$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8

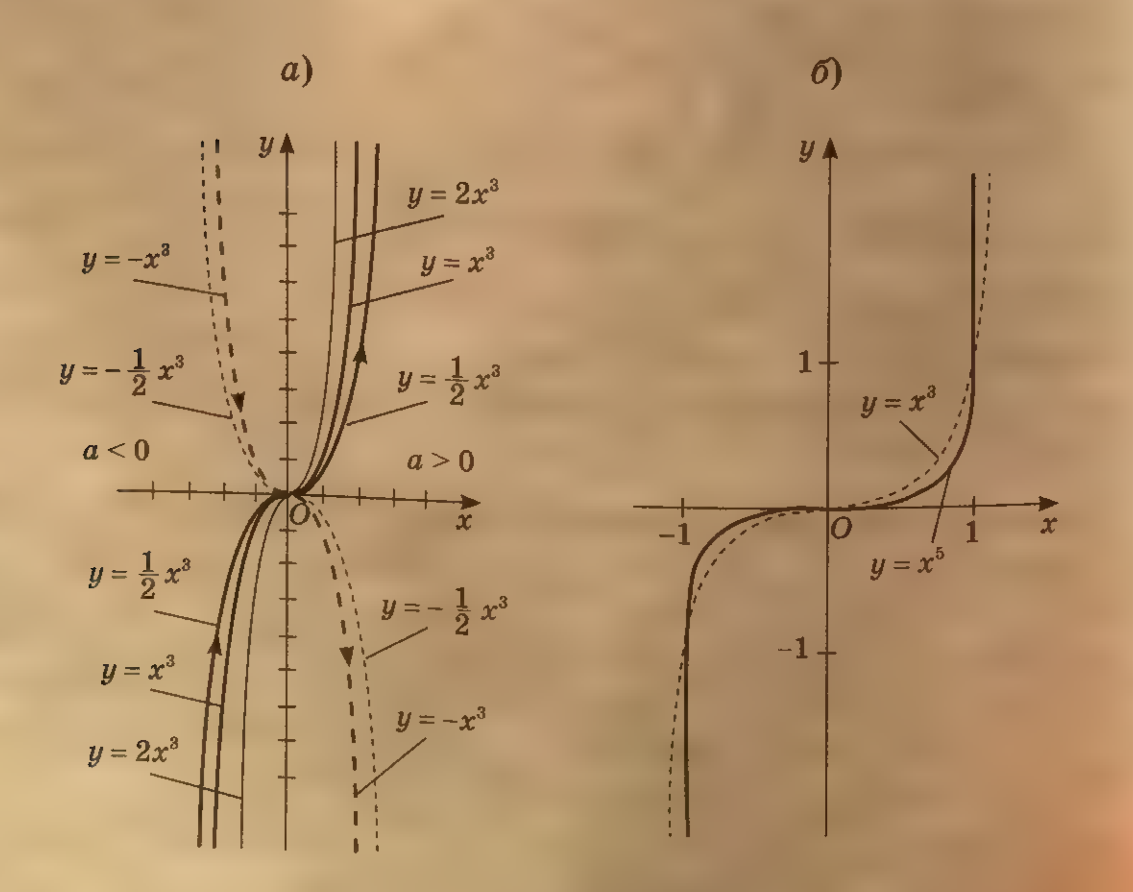


Рис. 46

Алгоритм 22 Построение графика функции $y = \sqrt[3]{x}$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$
3. Четность (нечетность) функции: $y(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -y(x)$, значит, функция $y = \sqrt[3]{x}$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат — точки $O(0; 0)$.
4. Найдите нули функции: $y = 0$, тогда $\sqrt[3]{x} = 0$, $x = 0$, и, значит, график проходит через начало координат $O(0; 0)$.
5. Составьте таблицу значений для $x > 0$ (берите «удобные» значения x, чтобы извлекался корень):

x	$\frac{1}{8}$	1	8
$y = \sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2

6. Постройте точки $A\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right)$, $B(1; 1)$, $C(8; 2)$ и симметричные им точки в III четверти (учитывая п. 3): $A_1\left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{2}\right)$, $B_1(-1; -1)$, $C_1(-8; -2)$.
7. Соедините точки плавной линией, получите график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 47).

З а м е ч а н и е. Графики функций $y = \sqrt[5]{x}$, $y = \sqrt[7]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$ ($n = 2$, 3, ...) имеют вид графика функции $y = \sqrt[3]{x}$: при $|x| < 1$ график функции

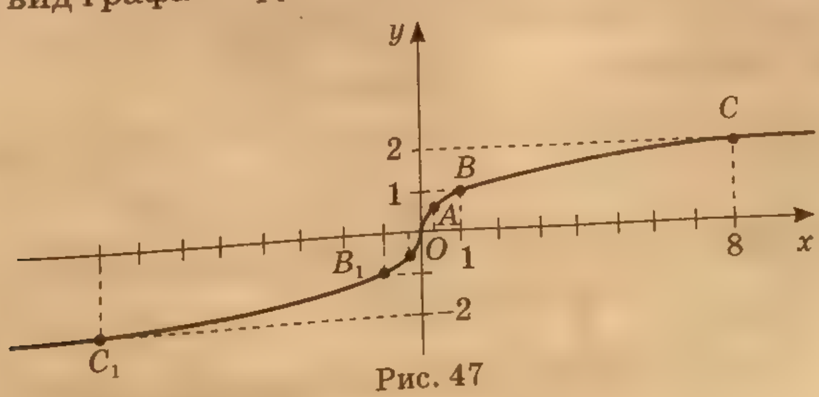


Рис. 47

$y = \sqrt[2n+1]{x}$ расположен дальше от оси Ox относительно графика функции $y = \sqrt[3]{x}$, при $|x| > 1$ — ближе к оси Ox относительно графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 48).

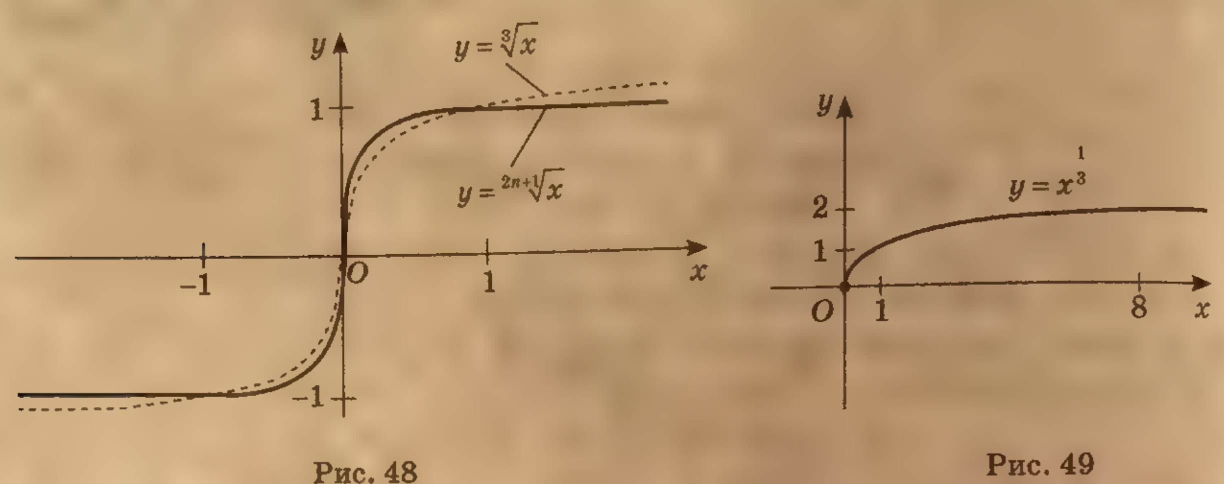


Рис. 48

Рис. 49

Графики функций $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{5}}$, ..., $y = x^{\frac{1}{2n+1}}$ имеют вид графика $y = \sqrt[3]{x}$ при $x \geq 0$ (рис. 49).

Алгоритм 23 Построение графика функции $y = \sqrt{x}$

1. $D(y) = [0; +\infty)$
2. $E(y) = [0; +\infty)$
3. Выясните, что функция не обладает свойством четности (нечетности) (см. п. 1); график не симметричен.
4. Найдите нули функции: $y = 0$, тогда $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, и, значит, график содержит точку $O(0;0)$.
5. Составьте таблицу значений $x_k \geq 0$ и $y_k = \sqrt{x_k}$ (берите «удобные» значения x, чтобы извлекался корень):

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = \sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2

6. Постройте точки (0; 0), $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, (1; 1), (4; 2) и соедините их плавной линией; продолжите линию вправо-вверх, получите график функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 50).

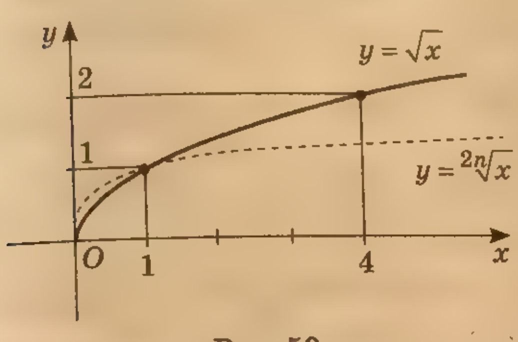


Рис. 50

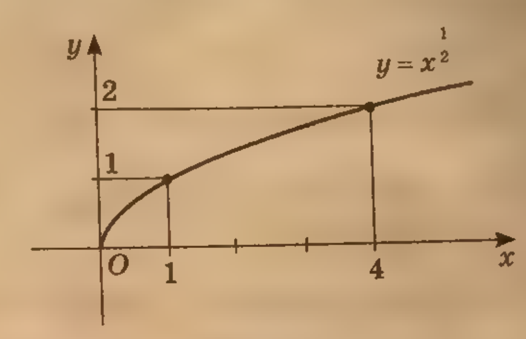


Рис. 51

Замечание. Графики функций $y=\sqrt[2n]{x}$ $(x \geq 0;\ n=2, 3, \ldots)$, $y=\sqrt[4]{x}$, $y=\sqrt[6]{x}$ и т. д. имеют вид графика функции $y=\sqrt{x}$: при $0 \leq x < 1$ график функции $y=\sqrt[2n]{x}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ расположен выше графика функции $y=\sqrt{x}$, а при $x > 1$ — ниже графика функции $y=\sqrt{x}$ (см. рис. 50).

Графики функций $y=x^{\frac{1}{4}}$, $y=x^{\frac{1}{6}}$, ..., $y=x^{\frac{1}{2n}}$ $(x > 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ имеют вид графика $y=\sqrt{x}$ и расположены в I четверти, функция возрастает (рис. 51).

Алгоритм 24 Построение графика функции $y=\sqrt[3]{x^2}$

1. Найдите область определения функции: $D(y)=(-\infty; +\infty)$.
2. Найдите множество значений функции: $E(y)=[0; +\infty)$.
3. Определите четность (нечетность): $y(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=y(x)$, функция $y=\sqrt[3]{x^2}$ четная, ее график симметричен относительно оси Oy.
4. Найдите нули функции: $y=0$, тогда $\sqrt[3]{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$; график проходит через точку $O(0; 0)$ — начало координат.
5. Составьте таблицу значений $x_k \geq 0$ и $y=\sqrt[3]{x^2}$ $(y \geq 0)$:

x	0	$\frac{1}{8}$	1	8
$y=\sqrt[3]{x^2}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

Точки в I четверти

6. Постройте точки $O(0;\,0)$, $B\left(\frac{1}{8};\,\frac{1}{4}\right)$, $C(1;\,1)$, $D(8;\,4)$ и симметричные им точки во II четверти (учитывая п. 3) $B_1\left(-\frac{1}{8};\,\frac{1}{2}\right)$, $C_1(-1;\,1)$, $D_1(-8;\,4)$ $(y \geq 0)$.

7. Соедините точки плавной линией, получите график $y=\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 52).

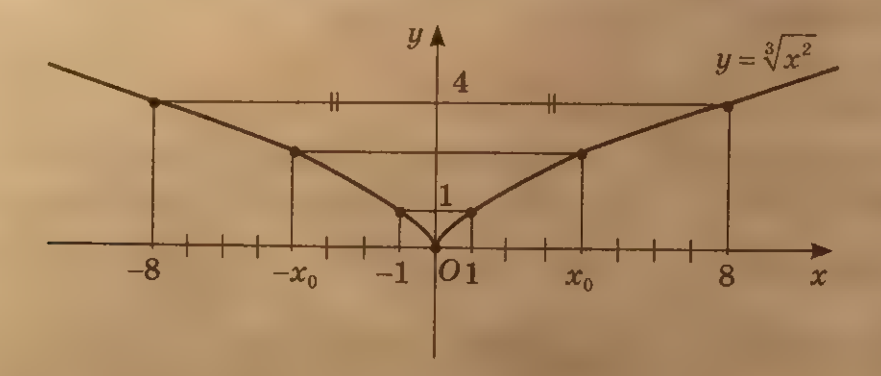


Рис. 52

Графики функций $y=x^{\frac{m}{n}}$ (m и n — натуральные числа, причем НОД $(m,\,n) = 1$, $n \neq 1$) имеют вид графика функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ при $x \geq 0$ (рис. 53).

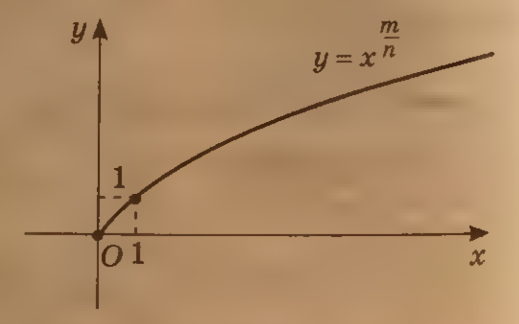


Рис. 53

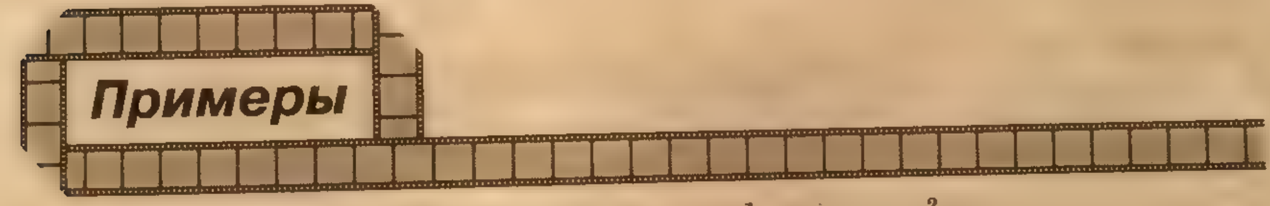
Алгоритм 25 Построение графика функции $y=x^{-\frac{m}{n}}$

1. $D(y)=(0;\,+\infty)$
2. $E(y)=(0;\,+\infty)$

3. Определите четность (нечетность): функция $y = x^{-\frac{m}{n}}$ не обладает этим свойством (см. п. 1), график не симметричен.
4. Найдите нули функции: $y \neq 0$ (см. п. 1 и 2). График не пересекает (и не касается) ось Ox.
5. Составьте таблицу значений $x > 0$ и $y > 0$:

x	x_0	x_1	...
$y = x^{-\frac{m}{n}}$	$\frac{1}{x_0^{\frac{m}{n}}}$	$\frac{1}{x_1^{\frac{m}{n}}}$	...

6. Постройте точки $\left(x_k; \frac{1}{x_k^{\frac{m}{n}}}\right)$, ... и соедините их плавной линией, получите график функции; он расположен в I четверти.



Постройте график функции: 1. $y = x^{-\frac{1}{2}}$. 2. $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

Выполните задание самостоятельно и сравните с рисунком 54.

Замечание. Графики функций вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$ (m, n — натуральные, $n \neq 1$) имеют форму графика функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$ (см. рис. 54).

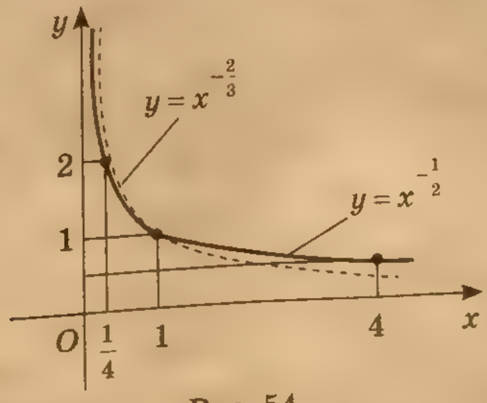


Рис. 54

Проверь себя!

Постройте график функции.

1. $y=\sqrt{x^3}$ 2. $y=-\dfrac{3}{x}$ 3. $y=-2x^5$ 4. $y=x^{-\frac{1}{3}}$

Ответ: **1.** Рис. 55. **2.** Рис. 56. **3.** Рис. 57. **4.** Рис. 58.

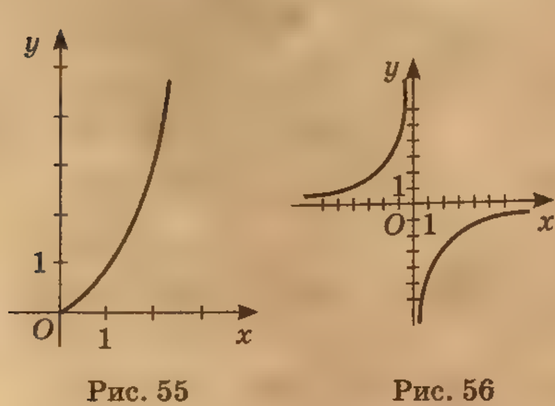


Рис. 55 Рис. 56



Рис. 57

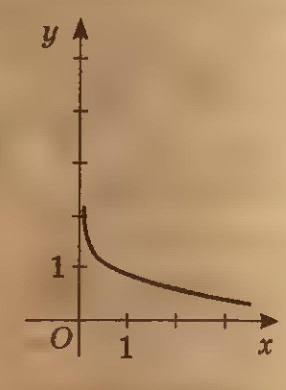


Рис. 58

Алгоритм 26 Построение графика функции $y=x^2$

График функции $y=x^2$ — *парабола*

1. $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$
2. $E(y)=[0;\ +\infty)$
3. Четность (нечетность) функции: $y(-x)=(-x)^2=x^2=y(x)$ — функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy.
4. Нули функции: $y=0$; $x^2=0 \Rightarrow x=0$ — точка $O(0;\ 0)$ принадлежит графику функции, $x^2\geq 0$, значит, точка $O(0;\ 0)$ — точка касания графика с осью Ox.
5. Составьте таблицу значений $x_k\geq 0$ и $y_k=x_k^2$:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

6. Постройте точки $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $B(1; 1)$, $C(2; 4)$ и симметричные им точки относительно оси Oy: $A_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $B_1(-1; 1)$, $C_1(-2; 4)$ (п. 3).
7. Соедините точки плавной линией и продолжите ветви вверх (п. 1), получите параболу $y = x^2$ (рис. 59).

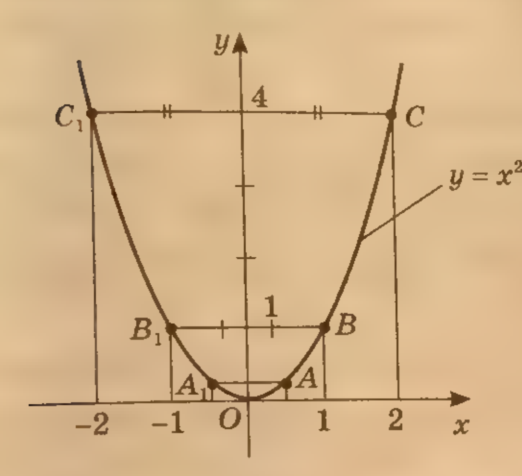


Рис. 59

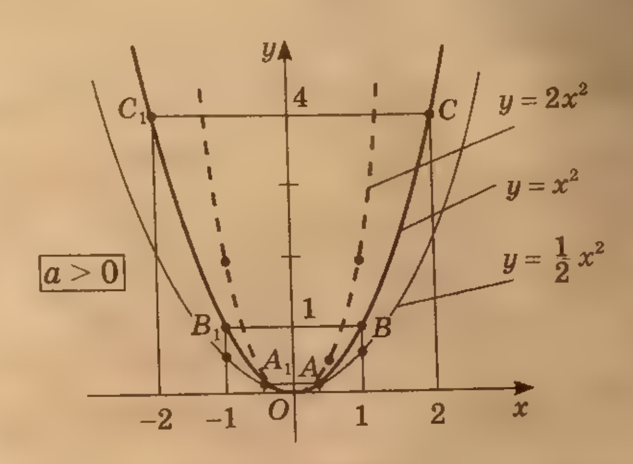


Рис. 60

Полезные советы

1. Чтобы построить график функции $y = ax^2$, надо значения x^2 умножить на a. Если $a > 0$, $ax^2 \geq 0$ ($y \geq 0$), то ветви графика направлены вверх и график находится над осью Ox (рис. 60). Если $a < 0$, то $ax^2 \leq 0$ ($y \leq 0$), ветви графика направлены вниз и график находится под осью Ox (рис. 61), причем значение $|a|$ влияет на сжатие графика: чем больше $|a|$, тем ветви графика ближе к оси Oy.

2. При построении графиков функций $y = x^4$, $y = x^6$, ..., $y = x^{2n}$, $n \in N$, учтите, что они имеют вид графика $y = x^2$ (рис. 62): при $0 < x < 1$ график функции $y = x^{2n}$ ($n = 2, 3, ...$) расположен тем ближе к оси Ox, чем больше $n \in N$, и ближе к оси Oy при $x > 1$.

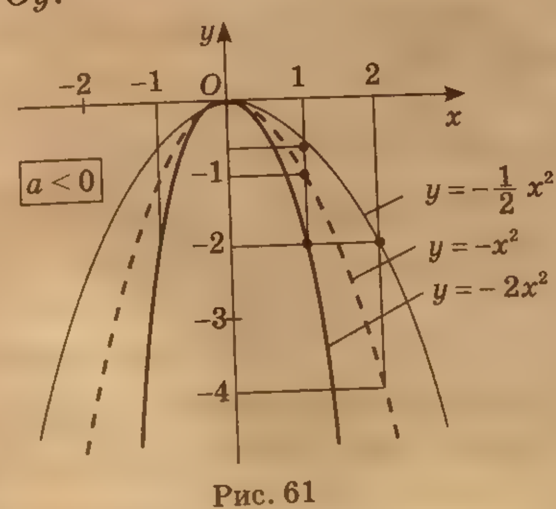


Рис. 61

Графики функций $y = ax^2 + c$, $y = a(x+b)^2$, $y = a(x+b)^2 + c$ можно получить из графика функции

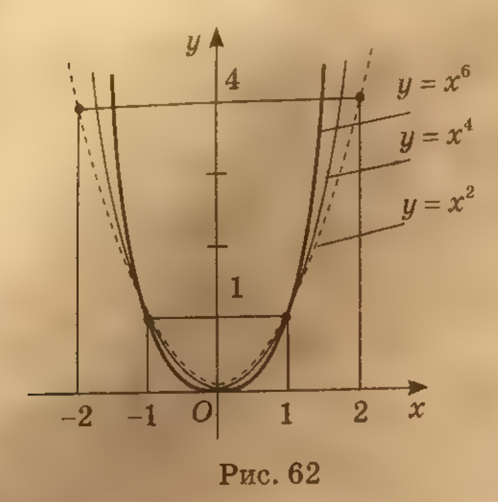


Рис. 62

$y = ax^2$ сдвигом его вдоль осей Ox и Oy или совершая сдвиг осей относительно графика. График каждой из перечисленных функций называется параболой. Рассмотрим это подробнее.

Для построения графика функции
$$y = kf(x + a) + b$$
уточним смысл чисел a, b и k:

- число a изменяет значение аргумента x, значит, график функции $y = f(x)$ перемещается вдоль оси Ox на $(-a)$ единиц (или ось Oy переносится параллельно самой себе на a единиц относительно графика функции $y = f(x)$ в сторону, противоположную движению графика функции $y = f(x)$;
- число b влияет на ординату $y - b = f(x + a)$, т. е. на движение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy — график перемещается на b единиц (или ось Ox переносится на $(-b)$ единиц параллельно самой себе относительно графика функции $y = f(x)$;
- число k влияет на растяжение и сжатие графика.

Вывод. Строить график функции $y = kf(x + a) + b$ можно двумя путями:

1) перемещать график функции $y = kf(x)$ на $(-a)$ единиц вдоль оси Ox и на b единиц вдоль оси Oy (получим новые координаты вершины параболы $(-a; b)$;

2) перемещать оси: Ox на a единиц и Oy на $(-b)$ единиц относительно графика функции $y = kf(x)$ параллельно самим себе, при этом точка пересечения перемещенных осей даст новое начало координат — точку $(a; -b)$.

Алгоритм 27 Построение графика функции $y = kf(x + a) + b$

I способ (сдвиг графика)

1. Постройте график функции $y = f(x)$ в системе координат xOy (подписав оси, начало координат и отметив масштабные единицы на осях).

2. Умножьте ординату каждой точки графика функции $y = f(x)$ на число k (если $k > 1$, то речь идет о растяжении вдоль оси Oy с коэффициентом k; если $0 < k < 1$, то это сжатие в $\frac{1}{k}$ раз).
3. Выполните параллельный перенос графика функции $y = kf(x)$ на $(-a)$ единиц вдоль оси Ox и на b единиц вдоль оси Oy: получите график функции $y = kf(x + a) + b$.

II способ (сдвиг осей)

1. Постройте график функции $y = f(x)$ в системе координат xOy (оси, начало координат и координаты точек на осях не подписывайте).
2. Умножьте ординату каждой точки графика функции $y = f(x)$ на число k (если $k > 1$, то речь идет о растяжении вдоль оси Oy с коэффициентом k; если $0 < k < 1$, то это сжатие в $\frac{1}{k}$ раз).
3. Постройте точку $(a; -b)$, примите ее за новое начало координат — точку $O(0; 0)$.
4. Проведите новые оси через точку $(a; -b)$ параллельно «старым» осям и назовите их Ox и Oy (при этом прежние оси получат сдвиг: ось Ox на $(-b)$, ось Oy на a единиц параллельно самим себе).
5. В новой системе координат график функции $y = kf(x)$ станет уже графиком функции $y = kf(x + a) + b$.
6. Нанесите на новых осях тот же единичный отрезок и координаты точек.

Алгоритм 28 Построение графиков функций $y = a(x + b)^2 + c$, $y = ax^2 + c$, $y = a(x + b)^2$

I способ (сдвиг графика)

1. Постройте график функции $y = ax^2$ в системе координат.
2. Найдите координаты вершины искомой параболы: $A(-b; c)$.
3. Выполните сдвиг (параллельный перенос) графика $y = ax^2$ (можно используя шаблон), совместив его вершину с точкой $(-b; c)$.
4. Подпишите полученный график.

II способ (сдвиг осей)

1. Постройте график функции $y = ax^2$ в системе координат (не подписывая осей).
2. Найдите (новое) начало координат $(b; -c)$.
3. Проведите через точку $(b; -c)$ (новые) оси координат параллельно старым, подпишите их, проставьте масштабные единицы по осям (те же, что и в п. 1).
4. Подпишите график в новой системе координат.



Постройте график функции.

1. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Решение.

Функция имеет вид $y = ax^2 + c$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = -2$.

I способ

1) Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

2) Координаты вершины искомой параболы: $A(0; -2)$.

3) Сдвигаем график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ так, чтобы вершина его совместилась с точкой $A(0; -2)$.

4) Подпишем полученный график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ (рис. 63).

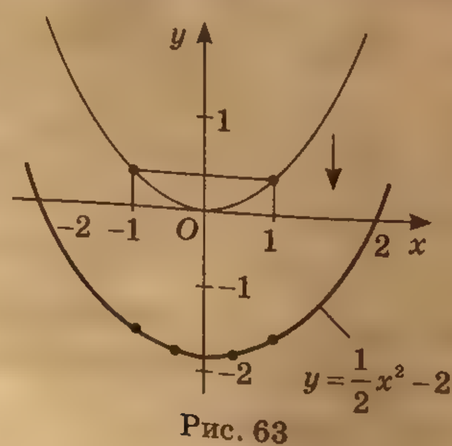


Рис. 63

II способ

1) Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

2) Новое начало координат: (0; 2).

3) Проводим новые оси координат (в нашем случае ось Oy совпала с прежней, а ось Ox поднялась на 2 единицы вверх), подписываем их: Ox и Oy.

4) Подпишем график (ранее построенный в п. 1). В новой системе координат это будет график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ (рис. 64).

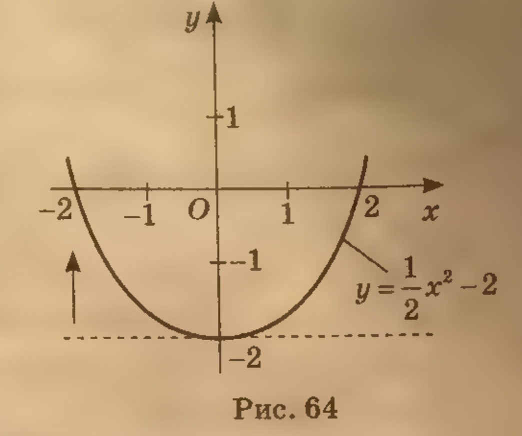


Рис. 64

2. $y = 2(x - 3)^2$

Решение.

Функция имеет вид $y = a(x + b)^2$, $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$.

I способ

1) Построим график функции $y = 2x^2$.

2) Координаты вершины искомой параболы: $A(3; 0)$.

3) Сдвигаем график функции $y = 2x^2$, совмещаем вершину параболы с точкой (3; 0).

4) Подпишем полученный график функции $y = 2(x - 3)^2$ (рис. 65).

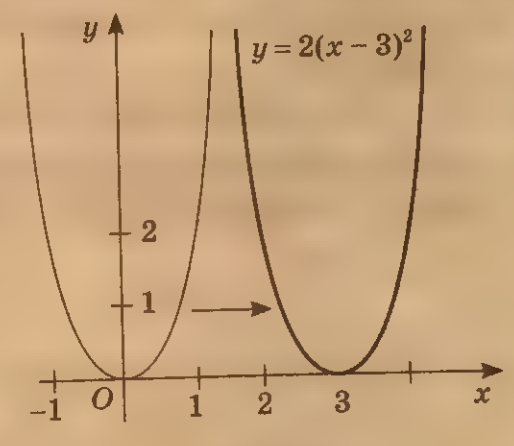


Рис. 65

II способ

1) Построим график функции $y = 2x^2$.

2) Новое начало координат: (−3; 0).

3) Проводим через точку (−3; 0) новые оси координат (ось Ox совпала с прежней, а ось Oy сдвинулась на 3 единицы влево).

4) Подпишем график (уже построенный в п. 1). В новой системе координат это будет график функции $y = 2(x - 3)^2$ (рис. 66).

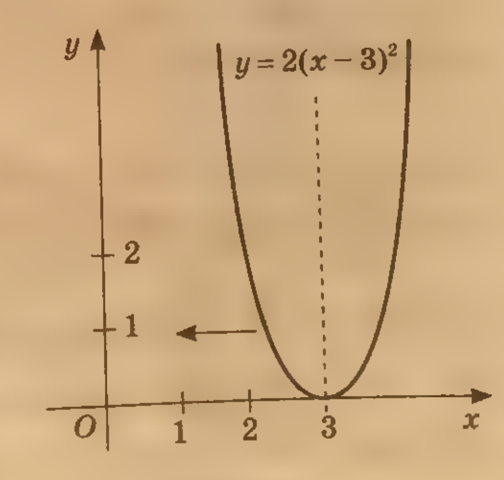


Рис. 66

3. $y = (x-2)^2 + 3$

Решение.

Функция имеет вид $y = a(x+b)^2 + c$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.

I способ

1) Построим график функции $y = x^2$.

2) Координаты вершины искомой параболы: $A(2; 3)$.

3) Сдвигаем график функции $y = x^2$ так, чтобы вершина его совместилась с точкой $A(2; 3)$.

4) Подпишем полученный график функции $y = (x-2)^2 + 3$ (рис. 67).

II способ

1) Построим график функции $y = x^2$.

2) Новое начало координат: $(-2; -3)$.

3) Проводим через точку $(-2; -3)$ новые оси координат параллельно старым, подписываем их Ox и Oy, проставляем масштабные единицы по осям.

4) Подпишем график в новой системе координат (рис. 68).

Замечание. При построении графика I способом (сдвиг графика) удобно пользоваться шаблоном параболы $y = ax^2$.

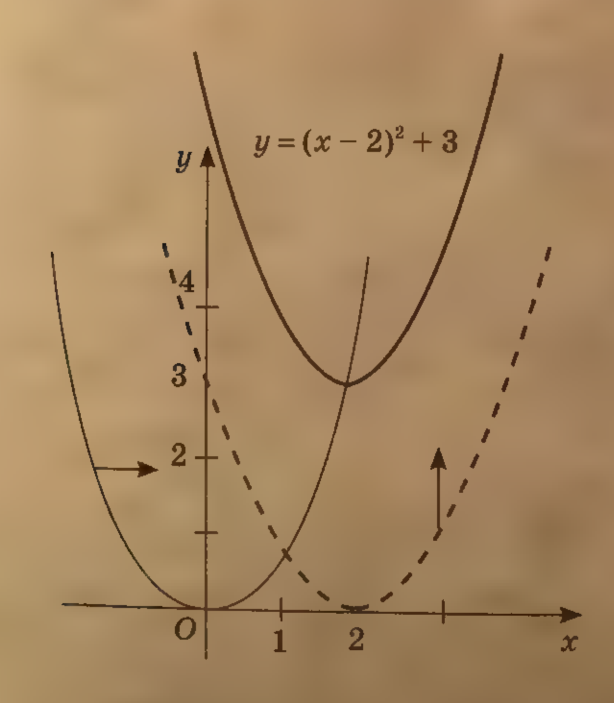


Рис. 67

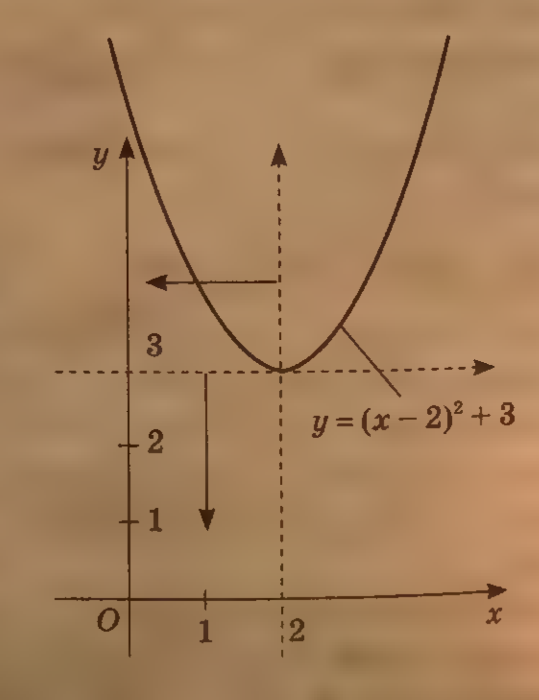


Рис. 68

Алгоритм 29 Построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Найдите координаты вершины параболы по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$ или по формуле $y_0 = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$ через коэффициенты a, b, c. $A(x_0; y_0)$ — вершина параболы.

2. Проведите ось симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$ через точку $A(x_0; y_0)$.

3. Определите направление ветвей параболы по знаку a: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

4. Найдите точки пересечения графика с осями:
   1) **с осью Ox**: $y = 0$, значит, $ax^2 + bx + c = 0$, решите это уравнение; если $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$ — два корня уравнения, график пересекает ось Ox в двух точках: $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$; если $D = 0$, то $x_1 = x_2$ — один корень уравнения, график касается оси Ox в точке $A(x_0; 0)$; если $D < 0$, то нет корней среди действительных чисел, нет и точек пересечения с осью Ox, и если $a > 0$, то парабола расположена над осью Ox, если $a < 0$, то парабола — под осью Ox;
   2) **с осью Oy**: $x = 0$, $y = c$, точка $B(0; c)$ – на оси Oy.

5. Постройте точку $B(2x_0; c)$, симметричную точке $B(0; c)$ относительно оси $x = -\frac{b}{2a}$.

6. Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней или имеет один корень, то возьмите две дополнительные точки $(x_0 \pm p; y(x_0 \pm p))$, где x_0 — абсцисса точки $A(x_0; y_0)$.

7. Соедините точки плавной линией и продолжите ветви графика вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$, получите искомую параболу.

Полезный совет. Если есть шаблон параболы $y = ax^2$, то найдите вершину параболы $A(x_0; y_0)$, проведите ось симметрии $x = -\frac{b}{2a}$ и, совместив вершину параболы шаблона с точкой A, обведите шаблон, получите искомый график.



Постройте график функции.

1. $y = x^2 - 2x - 3$

Решение.

1) Вершина параболы $A(x_0;\ y_0)$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = -\frac{-2}{2} = 1$; $y_0 = y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$; $A(1; -4)$.

2) Ось симметрии параболы: $x = -\frac{b}{2a}$; $x = 1$.

3) $a = 1 \Rightarrow a > 0$, ветви параболы направлены вверх ($\cup$).

4) Точки пересечения графика с осями:

а) с осью Ox: $y = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, точки $C(-1; 0)$ и $C_1(3; 0)$;

б) с осью Oy: $x = 0$; $y = -3$, точка $B(0; -3)$.

5) Точка $B_1(2x_0; c)$, симметричная точке $B(0; -3)$ относительно оси $x = 1$: $B_1(2; -3)$.

6) Построим точки A, B, B_1, C, C_1, соединим их плавной линией и продолжим ветви графика вверх (п. 3), получим искомую параболу (рис. 69).

2. $y = -2x^2 + 4x - 3$

Решение.

1) Вершина параболы $A(x_0; y_0)$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a};\ x_0 = -\frac{4}{-4} = 1;\ y_0 = y(1) = -2 + 4 - 3 = -1;\ A(1; -1)$$

2) Ось симметрии параболы: $x = -\frac{b}{2a}$; $x = 1$.

3) $a = -2 \Rightarrow a < 0$, ветви параболы направлены вниз ($\cap$).

4) Точки пересечения графика с осями:

а) с осью Ox: $y = -2x^2 + 4x - 3 = 0$; $D = b^2 - 4ac = 16 - 24 < 0$ — нет корней, парабола не пересекает ось Ox и находится под осью Ox (п. 3);

б) с осью Oy: $x = 0$; $y = -3$; $B(0; -3)$.

5) Точка $B_1(2x_0; c)$, симметричная точке $B(0; -3)$ относительно оси $x = 1$: $B_1(2; -3)$.

6) Дополнительные точки: $(x_0 \pm p;\ y(x_0 \pm p))$.

Пусть $p = 2$, тогда $x_1 = 1 + 2 = 3$; $y_1 = -2 \cdot 9 + 4 \cdot 3 - 3 = -9$; $D(3;\ -9)$; $x_2 = 1 - 2 = -1$; $y_2 = -9$; $D_1(-1; -9)$.

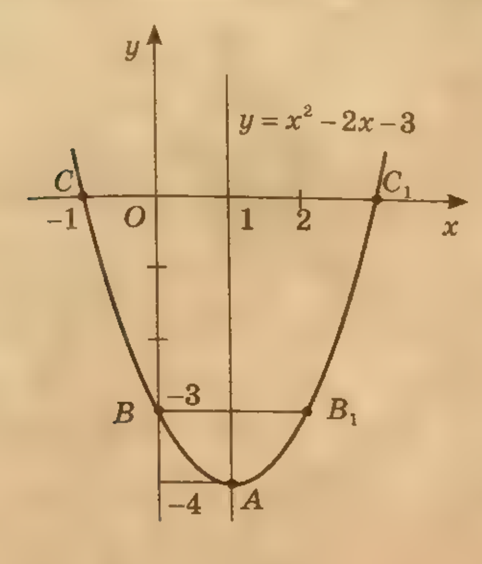


Рис. 69

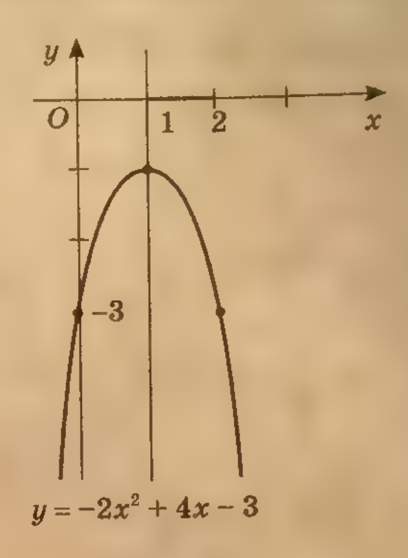


Рис. 70

7) Построим точки A_1, B_1, B, D, D_1 и соединим их плавной линией. Продолжим ветви графика вниз ($a < 0$), получим искомую параболу (рис. 70).

Полезные советы

1. Можно в квадратном трехчлене $ax^2 + bx + c$ выделить полный квадрат и построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$ привести к построению графика функции $y = a(x + b)^2 + c$ по алгоритму 28 (полный квадрат: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

2. Можно рассматривать построение графиков $y = a(x + b)^2$, $y = ax^2 + c$ как частные случаи построения графика $y = ax^2 + bx + c$ по алгоритму 29.

Проверь себя!

Постройте график функции.

1. $y = 2(x + 3)^2$

2. $y = 3x^2 - 2$

3. $y = -x^2 + 2x + 3$

Ответ: 1. Рис. 71. 2. Рис. 72. 3. Рис. 73.

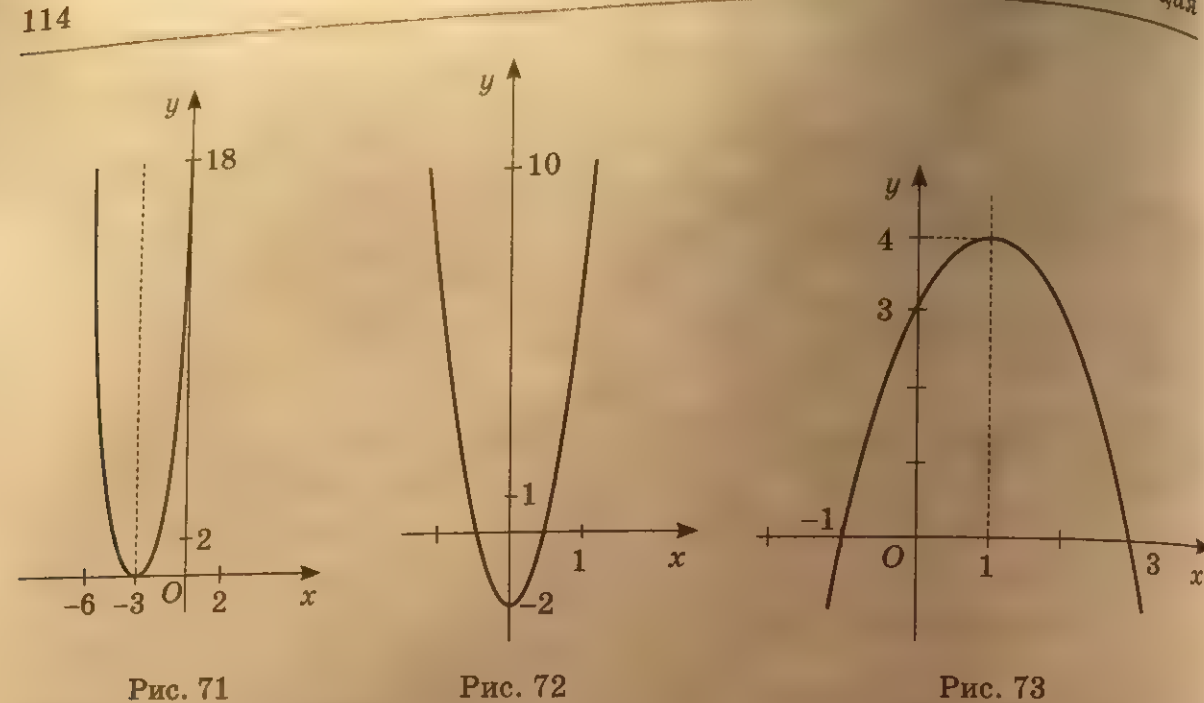


Рис. 71 Рис. 72 Рис. 73

Вывод. Параболу $y = ax^2 + bx + c$ можно построить тремя способами:

I. Построить график функции $y = ax^2$ и выполнить параллельный перенос этого графика относительно осей Ox и Oy.

II. Построить график функции $y = ax^2$ и выполнить параллельный перенос осей Ox и Oy относительно построенного графика.

III. Традиционно, пользуясь алгоритмом 29.

Алгоритм 30 Построение графика функции $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

1. Найдите область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Найдите множество значений функции: $E(y) = (0; +\infty)$.
3. Определите четность (нечетность) функции: $y(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \neq \pm y(x)$, следовательно, функция $y = a^x$ не обладает свойством четности (нечетности) и ее график не обладает свойством симметрии.
4. Найдите нули функции: $y = 0$, но $a^x \neq 0$, $a^x > 0$: нет точек пересечения графика функции с осью Ox.
5. Найдите точки пересечения графика функции с осью Oy:
$$x = 0,\ a^0 = 1,\ \text{т. е. } y(0) = 1;\ A(0; 1)$$
6. Составьте таблицу значений x и $y = a^x$:

x	-2	-1	0	1	2
$y=a^x$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2

7. Постройте точки и соедините их плавной линией, получите искомый график функции $y=a^x$.

При $a>1$ функция $y=a^x$ возрастает (рис. 74).

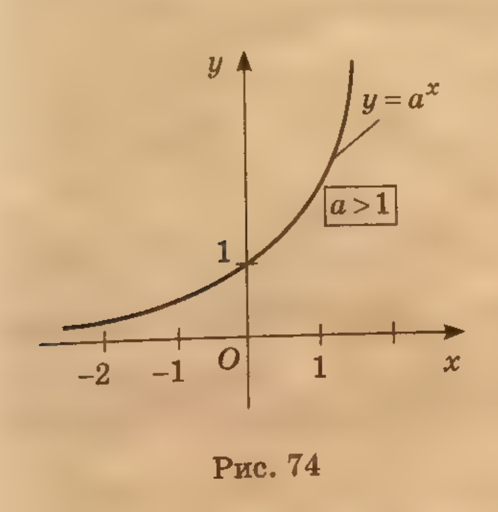
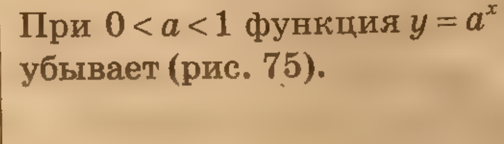


Рис. 74



При $0<a<1$ функция $y=a^x$ убывает (рис. 75).

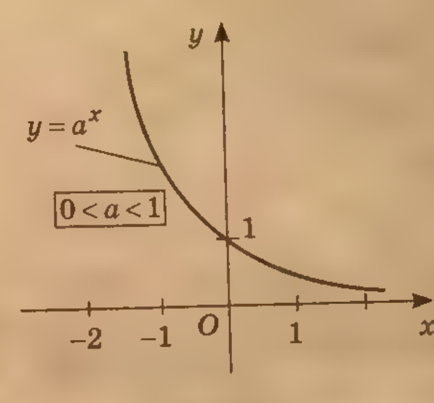


Рис. 75

Помните! Все графики функций $y=a^x$ проходят через точку (0; 1) и лежат в I и II четвертях, так как $a^x>0$ при любых x. Графики приближаются к оси Ox, но не пересекают ее, ось Ox — асимптота каждого такого графика.

Полезный совет. Для построения эскиза графика функции $y=a^x$ достаточно трех точек:

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{a}$	1	a

Зная направление графика (при $a>1$ вправо-вверх, а при $0<a<1$ вправо-вниз), проведите плавную кривую в I и II четвертях.



Постройте эскиз графика функции.

1. $y = 2^x$ 2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Решение.

Воспользуемся полезным советом.

1) Возьмем три значения $x = -1;\ 0;\ 1$ и вычислим значения $y = a^x$.

1.

x	-1	0	1
$y = 2^x$	$\frac{1}{2}$	1	2

2.

x	-1	0	1
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	2	1	$\frac{1}{2}$

2) Построим точки в системе координат xOy и соединим их плавной линией.

3) Графики приближаются к оси Ox, но не пересекают ось слева (рис. 76) или справа (рис. 77).

Замечания

1. Для более точного построения графика возьмите еще несколько точек.

2. Если $y = k \cdot a^x$, то знак числа k влияет на положение графика следующим образом: при $k > 0$ график проходит в I и II четвертях при $k < 0$ — в III и IV четвертях

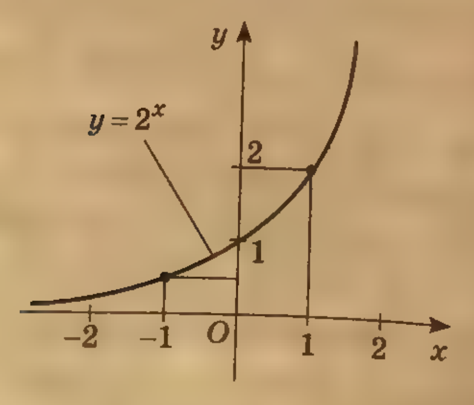


Рис. 76

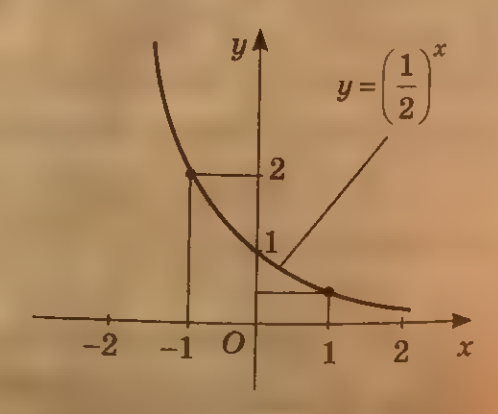


Рис. 77

Проверь себя!

Постройте эскиз графика функции.

1. $y = (0,3)^x$ 2. $y = 10^x$

Ответ: 1. Рис. 78. 2. Рис. 79.

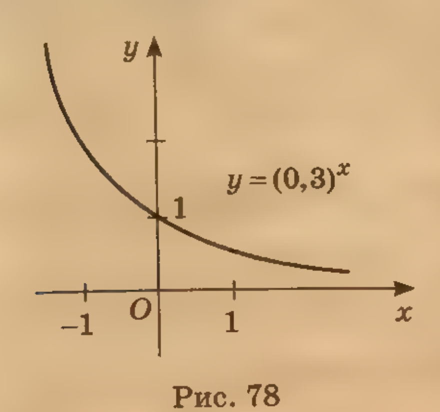


Рис. 78

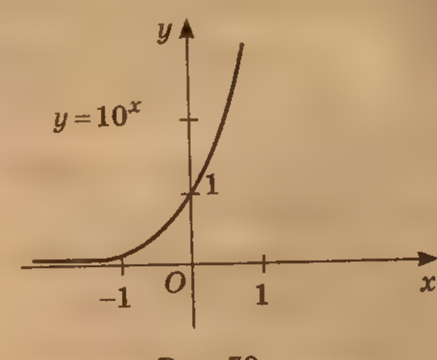


Рис. 79

Алгоритм 31 Построение графика функции $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

График функции $y = \log_a x$ можно построить двумя способами:

I. Применить алгоритм (см. ниже), основанный на применении свойств логарифмической функции.

II. Воспользоваться тем, что логарифмическая и показательная функции — взаимно обратные и что их графики симметричны относительно прямой $y = x$.

I способ

1. Найдите область определения функции: $D(y) = (0; +\infty)$.
2. Найдите множество значений функции: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3. Определите четность (нечетность) функции: не является ни четной, ни нечетной (п. 1).
4. Найдите нули функции: $y = 0$, т. е. $\log_a x = 0$, $x = a^0 = 1 \Rightarrow 1$ — корень уравнения, график пересекает ось Ox в точке (1; 0).
5. Найдите точки пересечения графика функции с осью Oy: $x \neq 0$ (п. 1), значит, нет точек пересечения графика с осью Oy.

6. Составьте таблицу значений x и $y=\log_a x$ (можно поменять местами значения $D(y)$ и $E(y)$ у функции $y=a^x$, так как $y=a^x$ и $y=\log_a x$ — взаимно обратные функции):

x	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2
$y=\log_a x$	−2	−1	0	1	2

7. Постройте точки в системе координат xOy и соедините их плавной линией:
при $a>1$ функция возрастает ($x_2>x_1$, $y_2>y_1$) — график направлен вверх-вправо (рис. 80);
при $0<a<1$ функция убывает ($x_2>x_1$, $y_2<y_1$) — график направлен вниз-вправо (рис. 81).
Графики приближаются к оси Oy, но не пересекают ее.

Замечание. График функции $y=\log_a x$ всегда проходит через точку (1; 0) и расположен в I и IV четвертях ($x>0$).

Полезный совет. Чтобы построить эскиз графика функции $y=\log_a x$, достаточно трех точек:

x	$\frac{1}{a}$	1	a
y	−1	0	1

Учитывая направление графика (при $a>1$ — вправо-вверх, при $0<a<1$ — вправо-вниз) и его расположение в I и IV четвертях, плавно

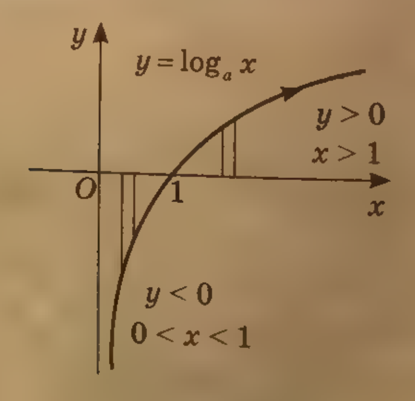


Рис. 80

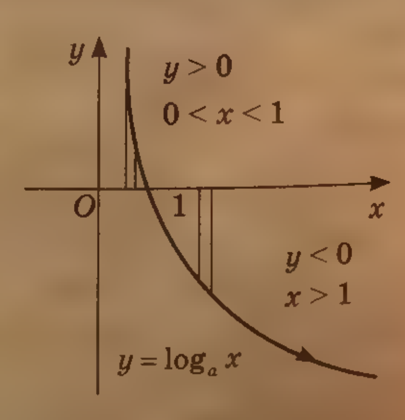


Рис. 81

соедините точки и продолжите график, помня, что при $|x| \to 0$ график приближается как угодно близко к оси Oy, но не пересекает ее.



1. Постройте графики функций: 1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решение.

1) $a = 2$, $a > 1$ (рис. 82)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−2	−1	0	1	2

2) $a = \frac{1}{2}$, $0 < a < 1$ (рис. 83)

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	−2	−1	0	1	2

2. 1) Найдите по графику функции $y = \log_2 x$ значения y, если $x = 1{,}5;\ 0{,}5;\ 3$.

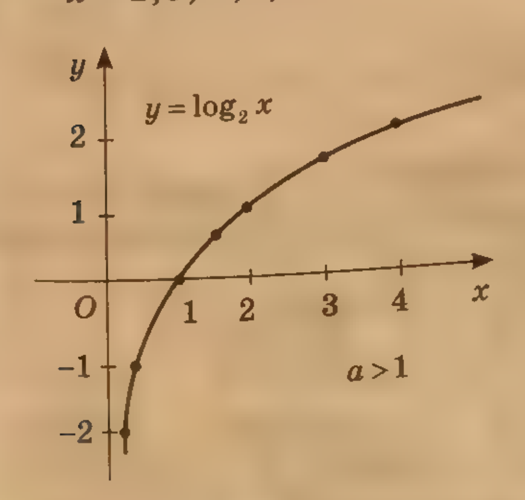


Рис. 82

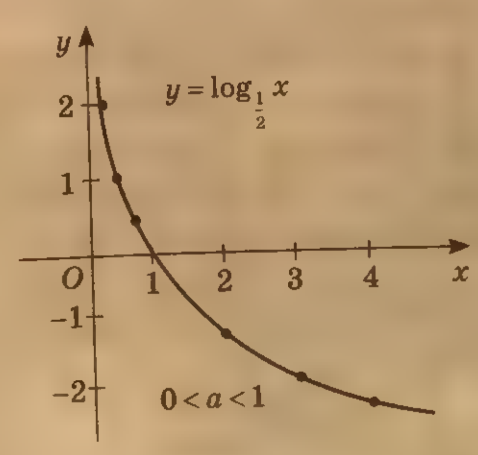


Рис. 83

2) Найдите по графику функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ значения x, если $y = -1{,}5$; -1; $\frac{1}{2}$; 2.

Решение.

1) Построим график функции $y = \log_2 x$.

Найдем на оси Ox значения 0,5; 1,5; 3; построим перпендикуляры в этих точках к оси Ox до пересечения с графиком.

Из точек пересечения графика с перпендикулярами к оси Ox опустим перпендикуляры на ось Oy и прочитаем значения y (рис. 84).

Получим $y(1{,}5) \approx 0{,}6$; $y(0{,}5) = -1$; $y(3) \approx 1{,}7$.

2) Действуя аналогично, получим (рис. 85):

$y = -1{,}5$, если $x \approx 2{,}8$; $y = -1$, если $x = 2$; $y = \frac{1}{2}$, если $x \approx 0{,}7$; $y = 2$, если $x = \frac{1}{4}$.

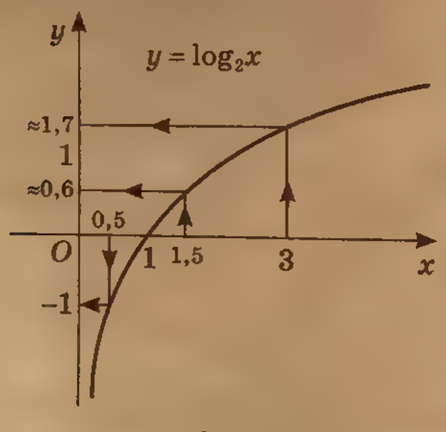



Рис. 84

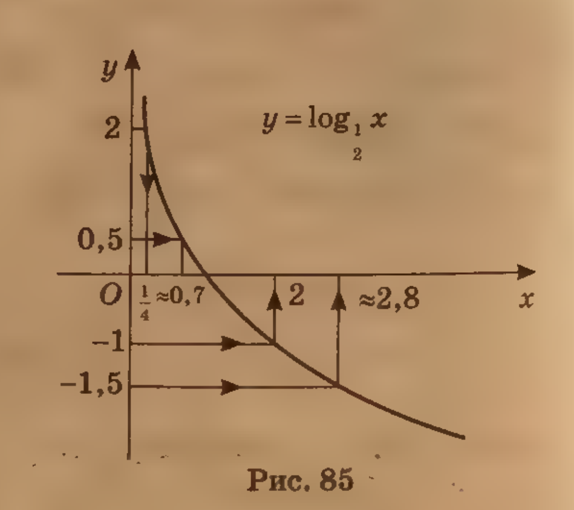


Рис. 85

II способ

1. Постройте график функции $y = a^x$ (см. алгоритм 30).

2. Проведите прямую $y = x$.

3. Постройте точки, симметричные точкам графика $y = a^x$ относительно прямой $y = x$, соедините их плавной линией, получите график обратной функции $y = \log_a x$ (рис. 86).

x	-1	0	1
$y = a^x$	$\frac{1}{a}$	1	a

На рисунке 87 даны графики $y = e^x$ и $y = \ln x$.

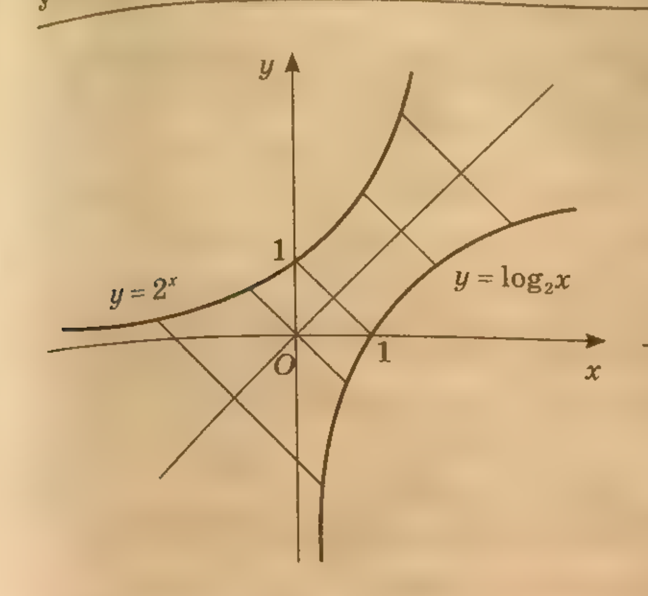


Рис. 86

Рис. 87

Проверь себя!

1. Постройте график функции: 1) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$; 3) $y=\left|\log_3 x\right|$.

Ответ: 1) Рис. 88. 2) Рис. 89. 3) Рис. 90.

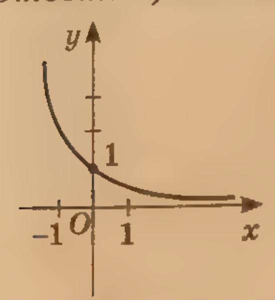


Рис. 88

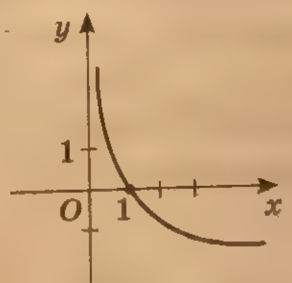


Рис. 89

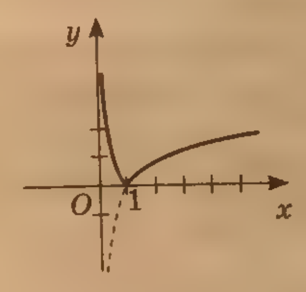


Рис. 90

2. ЕГЭ. График какой из перечисленных функций изображен на рисунке 91?

1. $y=2^x$
2. $y=(0,5)^x$
3. $y=\log_2 x$
4. $y=\log_{0,5} x$

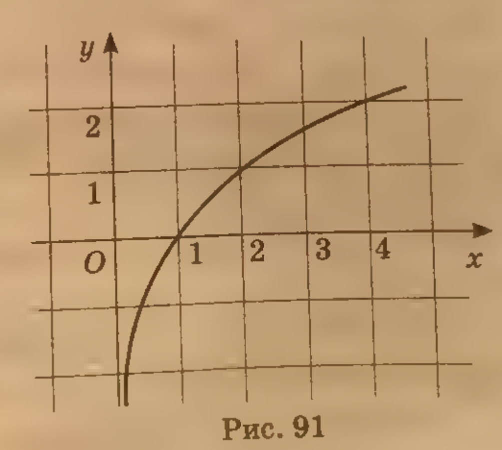


Рис. 91

Ответ: номер верного ответа: 3.

Построение графиков некоторых функций способом сдвига осей



Постройте график функции, пользуясь алгоритмом 27 (II способ).

1. $y=(x-2)^3$

2. $y=2^{x+1}-3$

<u>*Решение.*</u>

1.

1) Построим график функции $y=x^3$.

2) Построим точку $(-2;\ 0)$ — новое начало координат, обозначим ее $O(0;\ 0)$.

3) Проведем новую ось Oy через точку $(-2;\ 0)$.

4) Подпишем график функции $y=(x-2)^3$ в новой системе координат.

5) Нанесем на новой оси Oy тот же единичный отрезок и координаты точек (рис. 92).

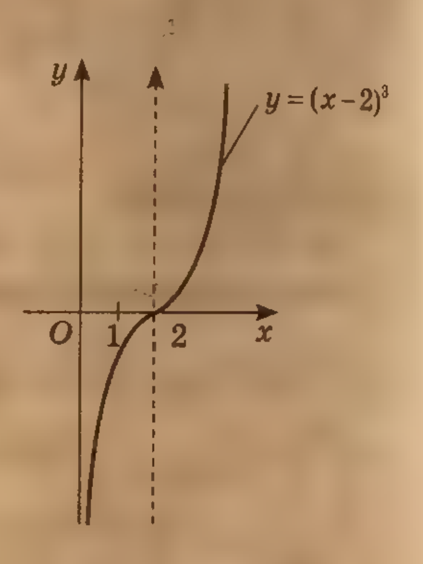


Рис. 92



2.

1) Построим график функции $y=2^x$.

2) Построим новое начало координат — точку $(1;\ 3)$ и обозначим ее $O(0;\ 0)$.

3) Проведем новые оси координат через точку $(1;\ 3)$ параллельно прежним осям и обозначим их Ox и Oy.

4) Подпишем график в новой системе координат: $y=2^{x+1}-3$.

5) Нанесем на новых осях Ox и Oy тот же единичный отрезок и координаты точек (рис. 93).

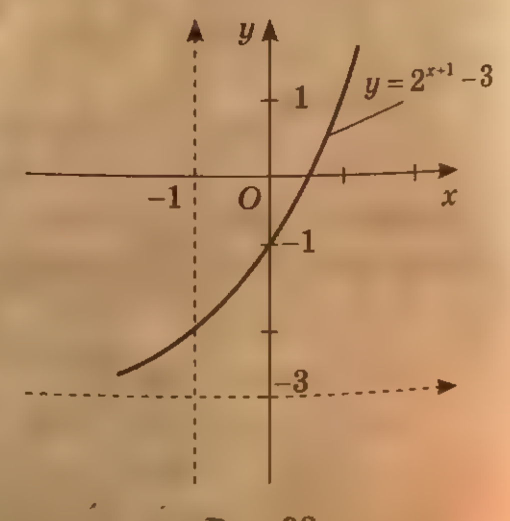
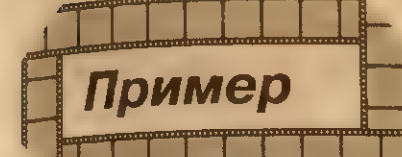


Рис. 93

Алгоритм 32 Построение графика функции $y = |f(x)|$

1. Постройте график функции $y = f(x)$.
2. Отобразите симметрично относительно оси Ox ту часть графика, которая находится под осью Ox (так как $|f(x)| \geq 0$), получите график функции $y = |f(x)|$.



Постройте график функции $y = |\log_2 x|$.

Решение.

1) Построим график функции $y = \log_2 x$.

2) Отобразим часть графика, которая находится под осью Ox, симметрично относительно оси Ox (рис. 94).

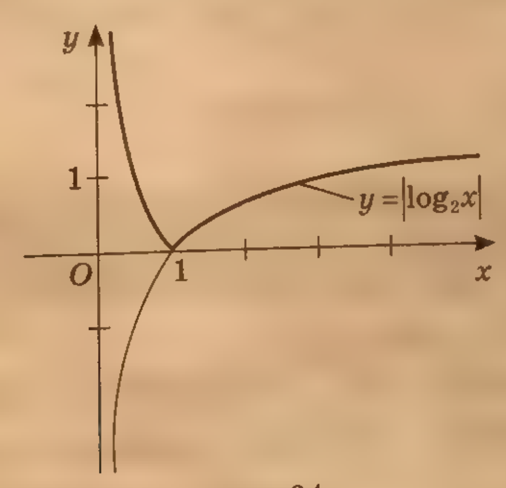


Рис. 94

Алгоритм 33 Построение графика функции $y = f(|x|)$

1. Постройте график функции $y = f(x)$.
2. Отобразите симметрично относительно оси Oy ту часть графика, которая справа от оси Oy (так как $y(|x|) = y(|-x|)$), получите график функции $y = f(|x|)$.

Пример

Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

Решение.

1) Построим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

2) Отобразим ту часть графика, которая справа от оси Oy, симметрично относительно оси Oy, получим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ (рис. 95).

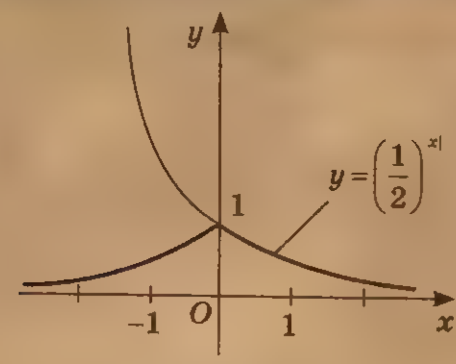


Рис. 95

Алгоритм 34 Построение графика функции $y = |f(|x|)|$

1. Постройте график функции $y = f(x)$ (I).
2. Постройте график функции $y = f(|x|)$ (II).
3. Постройте график функции $y = |f(|x|)|$ (III).



Постройте график функции.

1. $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} |x|\right|$

2. $y = \left|2^{|x+3|} - 4\right|$

Решение.

1. 1) Построим график функции $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (I).

2) Построим график функции $y=\log_{\frac{1}{2}} |x|$ (он будет состоять из двух ветвей: графика I и графика, симметричного ему относительно оси Oy (II)).

3) Построим график функции $y=\left|\log_{\frac{1}{2}} |x|\right|$ (он пройдет симметрично графику (II) относительно оси Ox (III)). Получили график искомой функции (рис. 96).

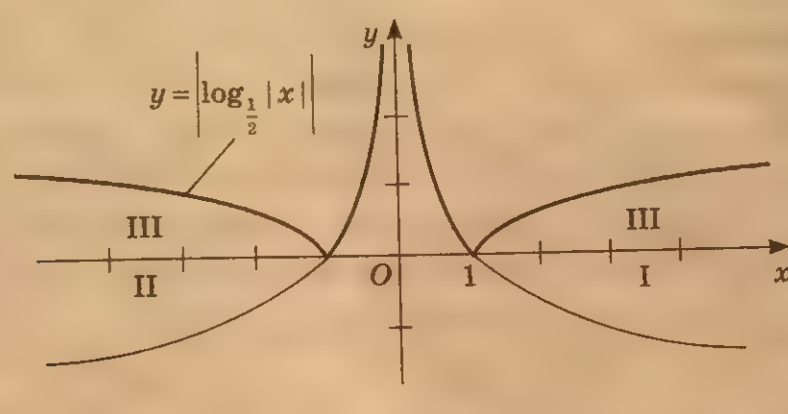


Рис. 96

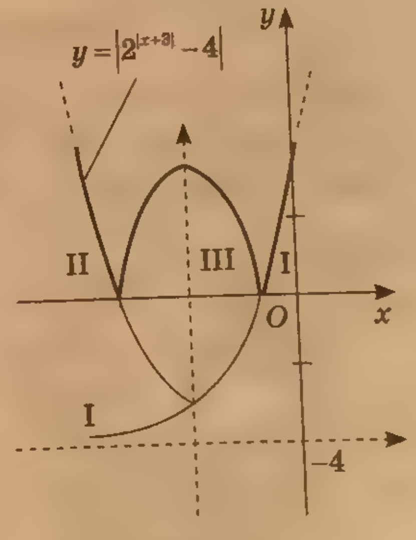


Рис. 97

2. 1) Построим график функции $y=2^x$ (I).

2) Построим график функции $y=2^{|x|}$ (II).

3). Построим новое начало координат — точку (3; 4) и примем ее за $O(0; 0)$.

4) Проведем новые оси через точку (3; 4), получим график $y=2^{|x+3|}-4$.

5) Отобразим часть графика (II), расположенную ниже новой оси Ox симметрично относительно новой оси Ox (III), получим график искомой функции $y=\left|2^{|x+3|}-4\right|$ (рис. 97).

Примеры построения графиков функций с модулем



Постройте график функции.

1. $y=|x^2+2x-3|$

Решение.

1) Построим график функции $y = x^2 + 2x - 3$.

Выделим полный квадрат в трехчлене:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4$$ (см. с. 113)

Построение можно выполнить и по алгоритму 29.

2) Отобразим нижнюю часть графика симметрично относительно оси Ox. Получим искомый график (рис. 98).

2. $y=|x-2|+3$

Решение.

1) Построим график функции $y=|x|$.

2) Построим новое начало координат: точку $(-2; -3)$ и обозначим ее $O(0; 0)$.

3) Проведем новые оси координат через точку $(-2; -3)$ параллельно прежним осям и обозначим их Ox и Oy, получим искомый график в новой системе координат (рис. 99).

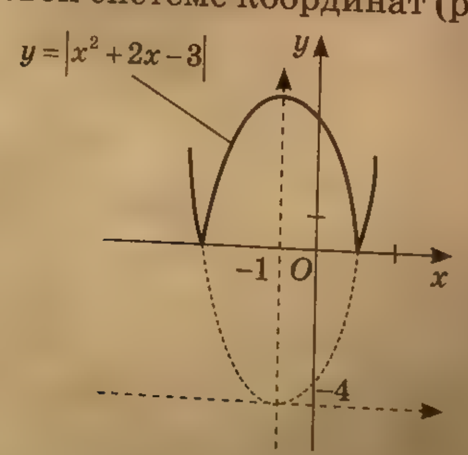


Рис. 98

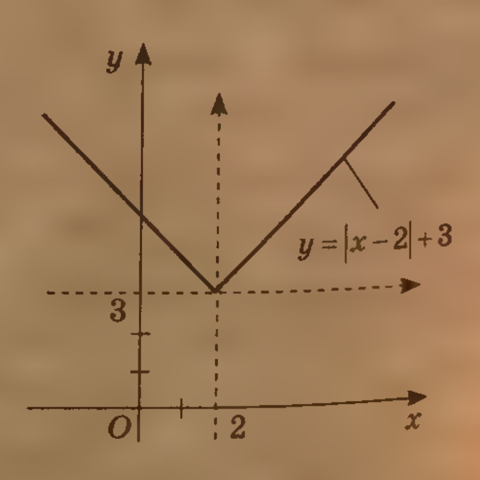


Рис. 99

3. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}-2$

Выполните построение самостоятельно и сравните с рисунком 100.

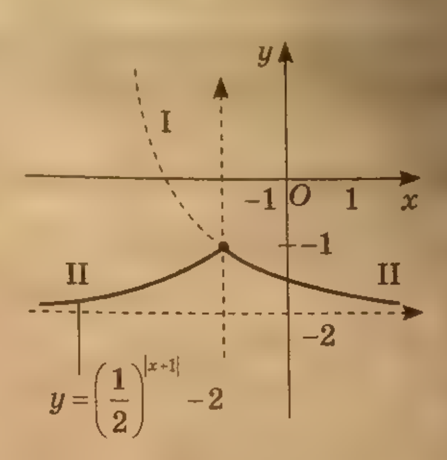


Рис. 100

4. $y=|x-2|+|x+3|+2x$

Решение.

1) Найдем значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль:

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$
$$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

2) Нанесем числа −3 и 2 на координатную прямую (условно, большее число правее, меньшее — левее).

3) Определим знаки выражений $(x-2)$ и $(x+3)$ на каждом промежутке и раскроем скобки модуля:

$x-2$	−		−		+
$x+3$	−	−3	+	2	+

а) $x \le -3 \Rightarrow y=2-x-x-3+2x=-1$; $y=-1$

б) $-3<x\le 2 \Rightarrow y=2-x+x+3+2x=2x+5$; $y=2x+5$

в) $x>2 \Rightarrow y=x-2+x+3+2x=4x+1$;
$y=4x+1$

4) Построим график на каждом промежутке, получим график данной функции (рис. 101):

$$y=\begin{cases}-1 \text{ при } x\le -3\\ 2x+5 \text{ при } -3<x\le 2\\ 4x+1 \text{ при } x>2\end{cases}$$

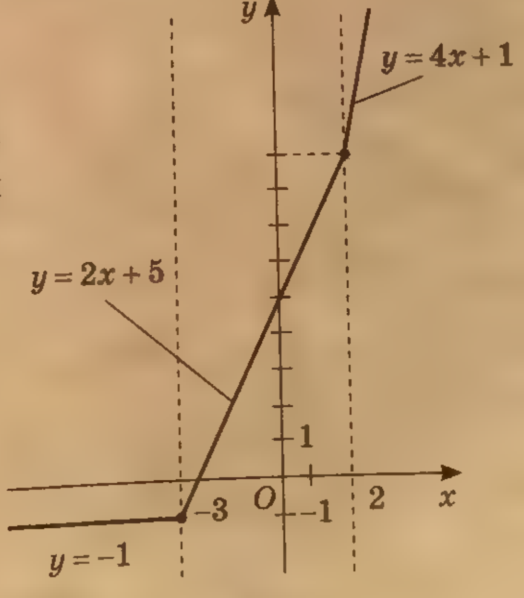


Рис. 101

Попробуй-ка реши!

Постройте график функции.

1. $y = |x+1| + |x-5| - 2x$

2. $y = \dfrac{x^2-1}{|x-1|} \cdot x$

3. $y = x^2 - 2\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$

Ответ: **1.** Рис. 102.
2. Рис. 103.
3. Рис. 104.

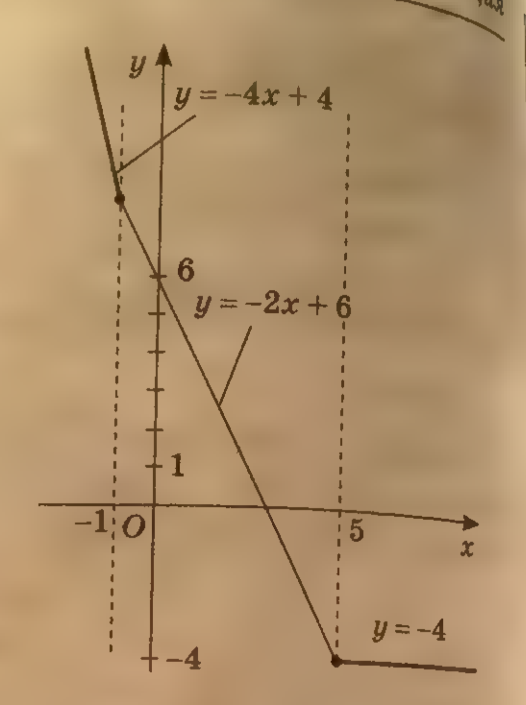
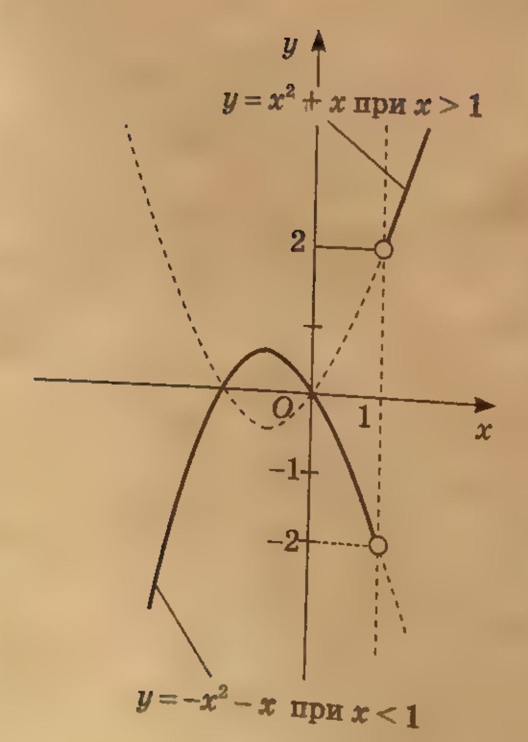


Рис. 102



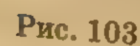


Рис. 103

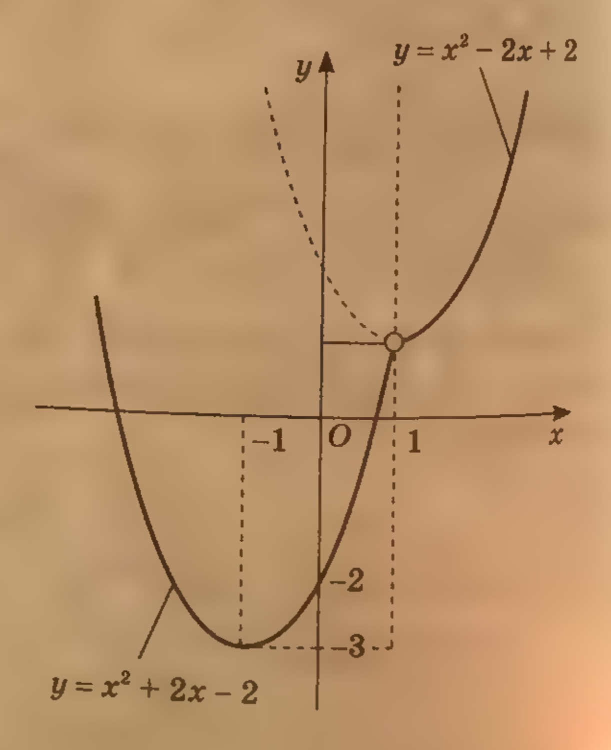


Рис. 104

Попробуй не реши!

Постройте график функции.

1. $y = |x^2 - 4x + 3|$
2. $y = x^2 - 2|x| + 3$
3. $y = (2 - x)(x - 6)$
4. $y = x^2 - \dfrac{|x|}{x}$
5. $y = \dfrac{1}{x - 4} + 1$
6. $y = |x + 5| - 4$

Ответ: **1.** Рис. 105. **2.** Рис. 106. **3.** Рис. 107. **4.** Рис. 108. **5.** Рис. 109. **6.** Рис. 110.

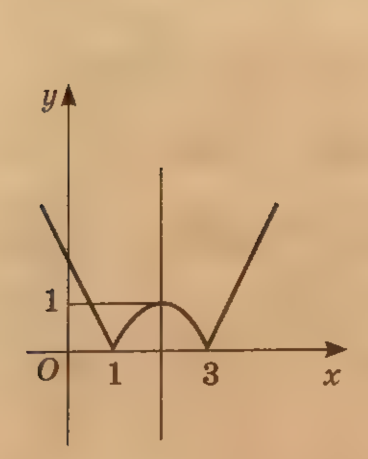


Рис. 105

Рис. 106

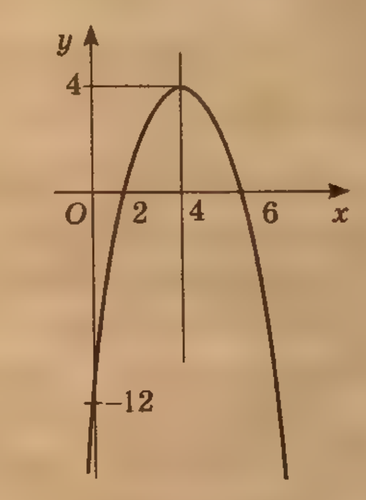


Рис. 107

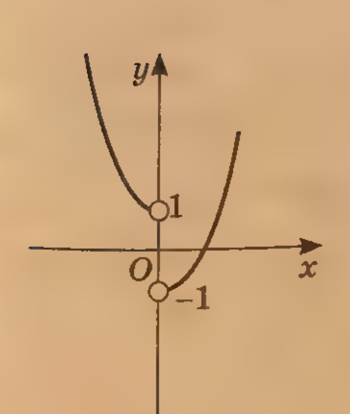


Рис. 108

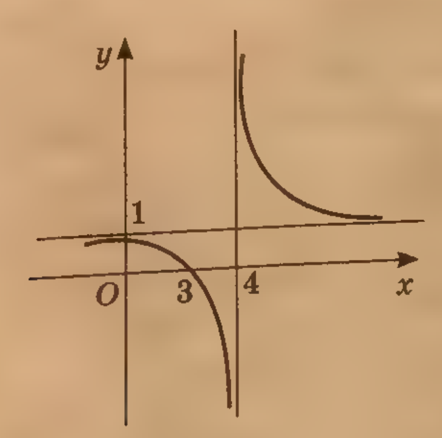


Рис. 109

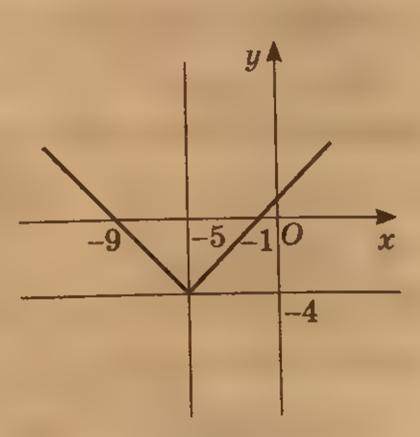
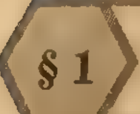


Рис. 110

Глава III
Решение уравнений и неравенств



§ 1 Уравнения и неравенства

Алгебраические выражения, соединенные знаком «равно» (=), образуют равенство.

В математике рассматривают два вида равенств: тождества и уравнения.

Определение 1. *Областью допустимых значений (ОДЗ) выражения* называют множество всех числовых значений букв, при подстановке которых выражение имеет смысл.

Например: ОДЗ выражения $\frac{1}{a-1}$ является множество всех действительных чисел, кроме $a=1$.

Определение 2. *Тождеством* называется равенство, верное при всех допустимых значениях букв входящих в него выражений.

Например: $5=5$; $0=0$; $a+7=7+a$; $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Определение 3. Два выражения считаются *тождественно равными*, если их числовые значения равны при любых допустимых значениях букв, входящих в эти выражения.

Определение 4. *Тождественное преобразование выражения* — это переход от одного выражения к тождественно равному ему выражению.

Тождественными преобразованиями мы пользуемся при упрощении выражений.

Определение 5. *Уравнением* называется равенство, содержащее буквы, обозначающие неизвестные числа.

Равенства вида $A(x)=B(x)$ или $A(x)=0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — выражения, содержащие неизвестное x, называют *уравнением с одним неизвестным*. Неизвестных может быть несколько (неизвестные называют также переменными).

Например: в уравнении $x+2y=5$ два неизвестных x и y

Выражения, стоящие в уравнении слева и справа от знака равенства, называют соответственно *левой* и *правой частями уравнения*.

Например: $$\underbrace{2x+3}_{\text{левая часть уравнения}} = \underbrace{5-x}_{\text{правая часть уравнения}}$$

Определение 6. *Корнем уравнения* называется значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Определение 7. *Решить уравнение* — значит найти все его корни или убедиться, что корней нет.

Уравнение может иметь один корень, несколько корней, не иметь корней или иметь их множество.

Например:

а) Уравнение $x+3=x+5$ не имеет корней, так как правая часть уравнения больше левой части при любых действительных значениях x.

б) Уравнение $3x-5=4$ имеет единственный корень — число 3, так как $3\cdot3-5=4$ — верное числовое равенство: $4=4$.

в) Уравнение $(x-2)(x+3)=0$ имеет два корня: 2 и -3.

г) Уравнение $3(x-2)+2=2(x+2)+x-8$ имеет множество решений, так как после преобразований получится тождество $3x-4=3x-4$.

Уравнение, содержащее другие буквы, кроме букв, обозначающих неизвестные, называется *уравнением с параметром* (или *буквенным уравнением*).

Например: $ax+3=b$ — уравнение с параметрами a и b

Виды уравнений

По характеру операций, выполняемых над неизвестными, уравнения делятся на:

1) *алгебраические*, если A и B — многочлены;

2) *дробно-рациональные*, если A и B — рациональные выражения и хотя бы одно из них дробное;

3) *иррациональные*, если A и B — алгебраические выражения и хотя бы одно из них иррациональное;

4) *трансцендентные*, если хотя бы одно из выражений A и B содержит неалгебраические операции над неизвестным: возведение в степень с иррациональным показателем, логарифмирование, вычисление значений тригонометрических функций и т. п.

Например, уравнения:

а) $5x^2-3=2$; $ax^3=8$ — алгебраические

б) $x^2+\frac{1}{x}=\frac{3}{2-x}$; $\frac{a}{x+1}+x=\frac{x-1}{x}$ — дробно-рациональные

в) $\sqrt{2+x}=3$; $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=2$ — иррациональные

г) $x^y=\log_y x$; $\sin^2 x-\operatorname{tg} x=0$ — трансцендентные

Алгебраические уравнения, содержащие одно неизвестное, могут быть 1, 2, 3-й степени и т. д. в зависимости от степени многочленов $A(x)$ и $B(x)$, входящих в уравнение, причем *наибольший из показателей при неизвестном определяет степень уравнения.*

Например: а) уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$, $a_0\neq 0$, имеет степень n ($n\in N$), как и степень старшего члена a_0x^n

б) уравнение $2x^3-3x^2-x-1=0$ — 3-ю степень

в) уравнение $3x^2-2x+2=0$ — 2-ю степень

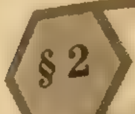
г) уравнение $2x+3=0$ — 1-ю степень

Если уравнение содержит два неизвестных x и y и имеет вид

$$ax^{m_1}y^{n_1}+bx^{m_2}y^{n_2}+cx^{m_3}y^{n_3}+\ldots=0\ (m_k\in N,\ n_k\in N),$$

то m_k+n_k есть степень k-го члена уравнения. Наибольшая из степеней членов уравнения называется степенью уравнения.

Например: уравнение $2xy^2+3x^2+2xy-3y=0$ — 3-й степени, так как наибольшая сумма показателей при x и y в первом члене равна 3.



§ 2 Область допустимых значений (ОДЗ) неизвестного в уравнении

Определение. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) неизвестного в уравнении называются все те значения неизвестного, при которых каждое выражение, входящее в уравнение, имеет смысл.

Например: найдем ОДЗ неизвестного в уравнении

$$\log_{\sqrt{3}}\underbrace{(x-2)}_{b}\cdot\log_5\underbrace{x}_{c}=2\log_3\underbrace{(x-2)}_{b}$$

Решение.

$\begin{cases}x-2>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>2$ | $\log_a b$ имеет смысл, если $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Ответ: ОДЗ: $(2;+\infty)$.

При решении любого уравнения желательно знать множество значений неизвестного, в котором могут находиться корни уравнения. ОДЗ поможет отбросить посторонние корни уравнения, если они появятся в ходе решения.

Алгоритм 35 Нахождение ОДЗ при решении уравнений

1. Определите, какие действия выполнены над неизвестным в данном уравнении.
2. Запишите за чертой справа обоснование для каждого выражения, входящего в уравнение, используя алгоритмы нахождения области определения функции или определение понятия.

Например:

а) в уравнении $\sqrt{x-5}=2-\sqrt{7-x}$ можно использовать область определения функции $y=\sqrt{f(x)}$ и записать за чертой так: $y=\sqrt{f(x)}$ имеет смысл, если $f(x)\geq 0$;

б) в дробно-рациональном уравнении, например в уравнении $\frac{2}{x-1}+x=\frac{3}{x+1}$, удобна такая символическая запись: дробь $\frac{a}{b}$ имеет смысл, если $b\neq 0$.

3. Запишите слева от черты ОДЗ для каждого выражения, входящего в уравнение, используя обоснование за чертой.
4. Решите систему из ОДЗ всех выражений, это и будет ОДЗ уравнения, так как значение x удовлетворяет всем выражениям одновременно.
5. Изобразите решение на оси.
6. Запишите ответ.

Например, при нахождении ОДЗ уравнения

$$\log_{\underbrace{x-1}_{a}}(\underbrace{x+3}_{b})=2$$

получим запись:

$x+3>0$	$\log_a b$ имеет смысл, если $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$
$x-1>0$	$a=x-1;\ b=x+3$
$x-1\neq 1$	

Решим систему:

$$\begin{cases}x+3>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\x>1\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

Внимание! ОДЗ уравнения — это промежуток значений x, поэтому нельзя записать ОДЗ, *например*, так: $x\neq 2$, а надо записать промежутком, *например:* $(1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

§ 3 Равносильность уравнений

Определение 1. Если каждый корень уравнения $F(x)=0$ (I) является одновременно и корнем уравнения $Q(x)=0$ (II), то уравнение $Q(x)=0$ есть *следствие* уравнения $F(x)=0$.

Символически это записывается так: $F(x)=0\Rightarrow Q(x)=0$

Определение 2. Два уравнения называются *равносильными*, если каждое из них есть следствие другого, т. е. каждый корень уравне-

ния I является корнем уравнения II и каждый корень уравнения II есть корень уравнения I.

Уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными. Два уравнения, равносильные третьему, равносильны между собой.

С помощью равносильности уравнений можно переходить от сложного уравнения к более простому, решение которого знаем.

Например:

$$2x^2-3x=x^2-x+3 \Leftrightarrow 2x^2-3x-x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: -1; 3.

Внимание! Используя равносильность уравнений, следите, чтобы ОДЗ уравнения не менялась при его решении. Для этого надо знать действия, сохраняющие равносильность уравнений.

Действия, сохраняющие равносильность уравнений

1. Если $f(x)=q(x)$ и c — число, или многочлен, или выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях неизвестного, то $f(x)\pm c=q(x)\pm c$.

2. Если $f(x)\pm c=q(x)\pm c$, то $f(x)=q(x)$.

3. Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный:

$$f(x)+c=q(x) \Leftrightarrow f(x)=q(x)-c$$

4. Если $f(x)=q(x)$ и c, не равное 0, — число или многочлен, не имеющий корней, то $f(x)\cdot c=q(x)\cdot c$ или $f(x):c=q(x):c$.

Например: $-2x=6\,|:(-2) \Leftrightarrow x=-3$; $\frac{1}{3}x=2\,|\cdot 3 \Leftrightarrow x=6$

З а м е ч а н и е. Знаки всех членов уравнения изменяются на противоположные, если обе части уравнения умножить или разделить на -1.

Внимание! Не делите на множитель с неизвестным, он может быть равен 0 (!), а решайте уравнение способом разложения на множители.

Например, решим уравнения:

а) $(x^2+1)x = 5(x^2+1)$ | $:(x^2+1)$, так как $x^2+1 \neq 0$ при любых x

$x = 5$

Ответ: 5.

б) $x(x+1) = 2(x+1) \Leftrightarrow x(x+1) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ | $x+1=0$ при $x=-1 \Rightarrow$ нельзя делить на $(x+1)$, иначе потеряем корень $x=-1$

Ответ: −1; 2.

Равносильные преобразования уравнений

I. $F(x) \cdot Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} F(x)=0 \\ Q(x)=0 \end{array}\right. \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$

Если $F(x)=0$, то при этом $Q(x)$ должен иметь смысл, и если $Q(x)=0$, то $F(x)$ должен иметь смысл, что устанавливает ОДЗ.

Например, решим уравнение $\log_2 x \cdot (x+1) = 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \Leftrightarrow x=1 \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases}$ | ОДЗ: $(0; +\infty)$ $\log_2 x$ имеет смысл при $x>0$

Ответ: 1.

II. $\dfrac{F(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)=0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)=Q(x) \\ F(x)\cdot Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

III. $\sqrt{F(x)} = \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)=Q(x) \\ F(x) \geq 0 \text{ (или } Q(x) \geq 0) \end{cases}$

$$\sqrt{F(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)=Q^2(x) \\ Q(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$F^2(x)=Q^2(x)\Leftrightarrow\begin{cases}F(x)=Q(x)\\F(x)>0\\Q(x)>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}-F(x)=-Q(x)\\F(x)<0\\Q(x)<0\end{cases}$$

$$\text{IV. }\log_a F(x)=\log_a Q(x)\underset{a>0;\ a\neq1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}F(x)=Q(x)\\F(x)>0\\Q(x)>0\end{cases}$$

$$\log_a\left(F(x)\right)^{2n}\underset{a>0;\ a\neq1}{\Leftrightarrow}2n\log_a|F(x)|$$

§ 4 Уравнения 1-й степени

Определение. Уравнение вида $ax=b$, $a\neq0$ называется *уравнением 1-й степени с одной переменной* или *линейным уравнением*.

Замечание. Линейное уравнение может иметь один корень $x=\frac{b}{a}$ при $a\neq0$; не иметь корней, например $0\cdot x=5$, или иметь их бесконечное множество: $0\cdot x=0$, где x — любое число.

Часто линейное уравнение записывают в виде $ax+b=0$.

Алгоритм 36 Решение уравнения 1-й степени

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите уравнение к целому виду, если уравнение содержит числовые знаменатели (умножьте все члены на НОК знаменателей).
3. Раскройте скобки.
4. Перенесите члены с x в левую часть уравнения, а числа в правую часть уравнения.
5. Приведите подобные члены, получите уравнение $ax=b$.
6. Решите уравнение $ax=b$, получите $x_0=\frac{b}{a}$.

7. Запишите ответ.

Замечание. Если какие-то пункты алгоритма уже выполнены, то выполняйте оставшиеся, главное, приведите уравнение к виду $ax = b$. Решение линейных уравнений $ax + b = 0$ см. в теме «Уравнения с параметром», § 18.



Примеры

Решите уравнения.

1. $4x-5{,}5=5x-3(2x-1{,}5)$

2. $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{2-x}{12}=\dfrac{x}{4}$

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$

2) Раскроем скобки: $4x-5{,}5=5x-6x+4{,}5$

3) Перенесем члены уравнения, содержащие x, влево, а числа вправо:

$4x-5x+6x=4{,}5+5{,}5$

4) Приведем подобные слагаемые: $5x = 10$

5) Найдем x: $x=10:5 \Leftrightarrow x=2$; $2 \in \boldsymbol{R}$

Ответ: 2.

2. 1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$

2) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{2-x}{12}=\dfrac{x}{4} \quad \Big|\cdot 12 \Leftrightarrow \qquad \Big|$ НОК(3; 4; 12) = 12

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)\cdot 12}{3}-\dfrac{(2-x)\cdot 12}{12}=\dfrac{x\cdot 12}{4} \Leftrightarrow (2x-1)\cdot 4-(2-x)=3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x-4-2+x=3x \Leftrightarrow 6x=6 \Leftrightarrow x=1$

Ответ: 1.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\frac{x}{12}+\frac{x}{4}+\frac{x}{72}=1$ 2. $x(x-5)-(x-2)^2=13+x$

Ответ: 1. $\frac{24}{19}$. 2. $-\frac{17}{2}$.

§ 5 Уравнения 2-й степени

Определение. Уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$, b и c — числа, x — переменная, называется *уравнением 2-й степени* или *полным квадратным уравнением*.

Квадратное уравнение, в котором $a=1$, называется *приведенным квадратным уравнением* и записывается в виде: $x^2+px+q=0$.

Алгоритм 37 Решение уравнения 2-й степени

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите уравнение к виду $ax^2+bx+c=0$.
3. Выпишите числовые значения a, b, c.
4. Запишите дискриминант и вычислите его: $D=b^2-4ac$.
5. Найдите корни:

   1) если $D>0$, то $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

   2) если $D=0$, то $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

   3) если $D<0$, то среди действительных чисел корней нет
6. Согласуйте корни с ОДЗ и запишите ответ.

Вывод. Все возможные случаи решения квадратных уравнений сведем в таблицу.

$ax^2 + bx + c = 0$	
b — нечетное	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (I)
b — четное, $m = \dfrac{b}{2}$	$x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$ (II)
$x^2 + px + q = 0$	
p — нечетное	$x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ (III)
p — четное, $m = \dfrac{p}{2}$	$x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - q}$ (IV)

Замечания

1. Можно все уравнения решать по формуле I, формулы II и III удобны при вычислениях с большими числами. Рационально выбранная формула приводит к более простым вычислениям.

2. Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ получается, если в полном квадратном уравнении все члены разделить на $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \text{ где } \frac{b}{a} = p; \ \frac{c}{a} = q;$$

получим уравнение $x^2 + px + q = 0$

3. Формулу II можно записать в виде $x_{1,2} = \dfrac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$



Решите уравнения.

1. $2x^2 - x - 6 = 0$ 2. $5x^2 - 8x - 4 = 0$ 3. $-x^2 - 7x + 8 = 0$

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x \in R$

2) $a = 2,\ b = -1,\ c = -6$

3) $D = (-1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 > 0$ — два корня

4) $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{1 \pm 7}{4}$

$x_1 = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2},\quad x_2 = \dfrac{1+7}{4} = 2$

$D = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Ответ: $-\dfrac{3}{2}$; 2.

2. 1) ОДЗ: $x \in R$

2) $a = 5,\ b = -8,\ c = -4$

3) $\dfrac{D}{4} = (-4)^2 + 5 \cdot 4 = 16 + 20 = 36$

4) $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{36}}{5} = \dfrac{4 \pm 6}{5}$

$x_1 = \dfrac{4+6}{5} = 2;\quad x_2 = \dfrac{4-6}{5} = -\dfrac{2}{5}$

$b = -8 = 2m \Rightarrow m = -4$

$\dfrac{D}{4} = m^2 - ac$

$x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$

Ответ: $-\dfrac{2}{5}$; 2.

Полезный совет. Если в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ имеем $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$. Если дано уравнение $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = q$.

Например: а) $x^2 + 6x - 7 = 0$ имеем $1 + 6 - 7 = 0$, тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -7$
б) $2x^2 - x - 1 = 0$ имеем $2 - 1 - 1 = 0$, тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -0{,}5$

3. $-x^2 - 7x + 8 = 0$ имеем $-1 - 7 + 8 = 0$, значит, $x_1 = 1$, $x_2 = -8$

Ответ: 1; –8.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $-x^2 + 2x + 15 = 0$

2. $3x^2 - 7x - 40 = 0$

3. $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5$

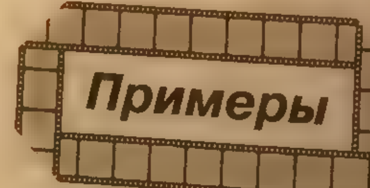
Ответ: 1. -3; 5. 2. $-\frac{8}{3}$; 5. 3. 15,8; 18.

Алгоритм 38 Разложение трехчлена $ax^2+bx+c=0$ на множители

1. Найдите корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.
2. Подставьте корни в формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ (I) или в формулу $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ (II), если $D>0$ и $x_1\neq x_2$.
3. Если корень уравнения один: $x_1=x_2$ $(D=0)$, то $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ (что то же самое, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$).

   Например: $4x^2+12x+9=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$; $x_1=-\frac{3}{2}$ | $\frac{b}{2a}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$; $x=-\frac{b}{2a}$
4. Если $D<0$, то нет действительных корней и трехчлен разложить на множители нельзя.

   Например: $x^2+5x+10=0$; $D=25-40<0$, значит, нет корней на множестве R и трехчлен $x^2+5x+10$ на множители разложить нельзя.



Разложите на множители.

1. x^2-6x+8 2. $2x^2-7x+5$

Решение.

1. 1) Найдем корни уравнения $x^2-6x+8=0$, $m=-3$, $q=8$

$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$

$x_1=4$, $x_2=2$

ОДЗ: $x\in R$

$x^2+2mx+q=0$

$x_{1,2}=-m\pm\sqrt{m^2-q}$

2) Подставим корни в формулу II:

$x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$

$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$

Ответ: $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$.

2. 1) $2x^2-7x+5=0$

$x_1=1,\ x_2=\dfrac{5}{2}$

2) $2x^2-7x+5=2(x-1)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=$
$=(x-1)(2x-5)$

ОДЗ: $x\in R$
$D=b^2-4ac$
$a+b+c=2-7+5=0$
$x_1=1,\ x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{2}$
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Ответ: $2x^2-7x+5=(x-1)(2x-5)$.

Проверь себя!

Разложите на множители.

1. $x^2-2x-35$

2. $2x^2+8x-90$

Ответ: 1. $(x-7)(x+5)$. 2. $2(x+9)(x-5)$.

Неполные квадратные уравнения

Если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, принять $b=0$ или $c=0$ ($b=0$ и $c=0$), то получим три вида неполных квадратных уравнений:

1	$ax^2+bx=0$	$x_1=0,\ x_2=-\dfrac{b}{a}$
2	$ax^2+c=0$	$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$
3	$ax^2=0$	$x_{1,2}=0$

Алгоритм 39 Решение неполных квадратных уравнений

1. Найдите ОДЗ.
2. Упростите уравнение и приведите его к одному из трех видов.
3. Запишите формулу решения и примените ее.



Решите уравнения.

1. $9x^2-16=0$ 2. $2x^2+32=0$

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x \in R$

2) $9x^2-16=0$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{-16}{9}}=\pm\frac{4}{3}$

| $ax^2+c=0$
 $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Ответ: $-\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$.

2. 1) ОДЗ: $x \in R$

2) $2x^2+32=0 \Leftrightarrow x^2=-16 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

| $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
 $a=2$, $c=32$ (одного знака) — нет корней

Ответ: уравнение не имеет корней.

Замечания

1. Уравнение $ax^2+c=0$ можно решать также разложением на множители, если $c<0$, $a>0$.

Например, решим уравнение $900x^2-400=0$:

$$900x^2-400=0 \Leftrightarrow 9x^2-4=0 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+2)=0 \Leftrightarrow$$

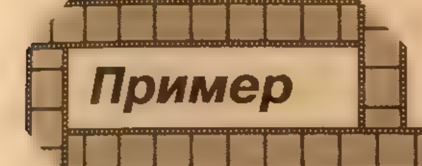
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-2=0 \\ 3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$.

2. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ тоже решается разложением на множители: $x(ax + b) = 0$, тогда или $x_1 = 0$, или $ax + b = 0$, т. е. $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Если $a \neq 0$, $b = 0$ и $c = 0$, то уравнение $ax^2 = 0$ имеет равные корни: $x_1 = x_2 = 0$.

Например: уравнение $100x^2 = 0$ имеет корень $x = 0$



Решите уравнение $6(x-2)+11=(3x-1)(3x+1)$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $6x-12+11=9x^2-1 \Leftrightarrow 9x^2-6x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1=0; \quad x_2=-\frac{-6}{9}=\frac{2}{3}$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$ax^2+bx=0$

$x_1=0;\ x_2=-\frac{b}{a}$

Ответ: 0; $\frac{2}{3}$.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $x^2+6x=0$
2. $4x^2-9=0$
3. $14x^2=0$
4. $2x^2=6x$

Ответ: 1. 0; –6. 2. $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$. 3. 0. 4. 0; 3.

ТЕОРЕМА ВИЕТА. Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$$

Эти равенства называются формулами Виета.

Из теоремы Виета можно вывести, что:

1) $x_1^2+x_2^2=\underbrace{(x_1+x_2)^2}_{-p}-2\underbrace{x_1\cdot x_2}_{q}=p^2-2q$ | $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

2) $x_1^3+x_2^3=\underbrace{(x_1+x_2)^3}_{-p}-3\underbrace{x_1\cdot x_2}_{q}\underbrace{(x_1+x_2)}_{-p}=$ | $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=-p^3+3pq=-p(p^2-3q)$

ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЕ ВИЕТА. Если числа p, q, x_1 и x_2 таковы, что $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$, то x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Для полного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ формулы Виета выглядят так: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Алгоритм 

Решение квадратного уравнения по формулам Виета

1. Приведите уравнение к виду $x^2+px+q=0$.
2. За чертой запишите формулы Виета.
3. Подберите такие пары множителей, чтобы их произведение равнялось q.
4. Выберите такую пару множителей (п. 3), чтобы их сумма равнялась $(-p)$ — эти числа будут корнями уравнения.
5. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. $x^2+8x+7=0$ 2. $x^2-7x+12=0$

Решение.

1. $\begin{cases} x_1+x_2=-8 \\ x_1\cdot x_2=7 \end{cases}$ | $x_1+x_2=-p=-8$, $x_1\cdot x_2=q=7$, $(x_1<0;\ x_2<0)$

$7=1\cdot7=(-1)\cdot(-7)$;

$-1+(-7)=-8 \Rightarrow -1$ и -7 — корни

Ответ: -1; -7.

2. $\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=12 \end{cases}$ | $x_1+x_2=-p=-(-7)=7$, $x_1\cdot x_2=q=12$, $(x_1>0;\ x_2>0)$

$12=2\cdot6=3\cdot4$; $2+6\neq7$;

$3+4=7\Rightarrow 3$ и 4 — корни

Ответ: 3; 4.

Проверь себя!

Решите уравнения по формулам Виета.

1. $x^2-8x-9=0$ 2. $x^2+2x-3=0$ 3. $x^2-10x-1200=0$

Ответ: 1. -1; 9. 2. -3; 1. 3. -30; 40.



Составьте квадратное уравнение, имеющее корни -3 и 8, по теореме, обратной теореме Виета.

<u>*Решение.*</u>

1) $x_1 + x_2 = -3 + 8 = 5 = -p \Rightarrow p = -5$

2) $x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 8 = -24 = q \Rightarrow q = -24$

3) Уравнение $x^2 - 5x - 24 = 0$ — искомое

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow p = -5,\ q = -24$

Ответ: $x^2 - 5x - 24 = 0$.

Проверь себя!

Составьте квадратное уравнение по данным его корням.

1. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{3}$ **2.** $x_1 = -8,\ x_2 = 10$

Ответ: **1.** $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$. **2.** $x^2 - 2x - 80 = 0$.

Определение. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется *биквадратным*.

Алгоритм 41 Решение биквадратного уравнения

1. Найдите ОДЗ.
2. Обозначьте неизвестное $x^2 = t$ $(t > 0)$, тогда $x^4 = t^2$, получите квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0,\ t > 0$.
3. Решите уравнение $at^2 + bt + c = 0$, отберите значения $t > 0$ (если $t < 0$, то уравнение $x^2 = t$ не имеет действительных корней).
4. Решите уравнение $x^2 = t \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$:

   если $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$, то получите 4 корня

   если $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$, то получите 2 корня

   если $t_1 < 0$ и $t_2 < 0$, то нет корней на множестве действительных чисел R
5. Запишите ответ.



Решите уравнение $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $t^2 - 2t - 8 = 0$

3) $t_1 = -2$; $t_2 = 4$

4) $x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Пусть $x^2 = t$ $(t > 0)$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 \cdot t_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

$t_1 = -2 < 0$ — не проходит

Ответ: –2; 2.

Проверь себя!

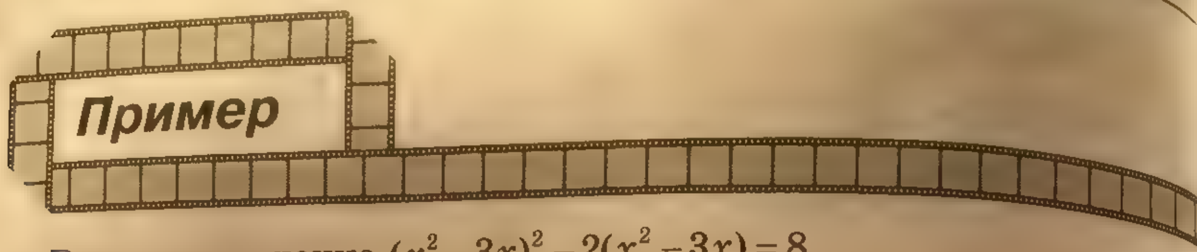
Решите уравнения.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **2.** $36x^4 - 5x^2 - 1 = 0$

Ответ: **1.** –2; 2; –3; 3. **2.** –0,5; 0,5.

Алгоритм 42. Решение уравнения, приводимого к квадратному введением новой переменной

1. Обозначьте повторяющееся выражение другой буквой (новая переменная) и решите квадратное уравнение относительно новой неизвестной.
2. Подставьте найденное значение новой переменной в ее обозначение и решите уравнение относительно заданной.
3. Запишите ответ.



Решите уравнение $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)=8$.

Пусть $x^2-3x=t$

1) $t^2-2t-8=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=2 \\ t_1\cdot t_2=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2 \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} x^2-3x=4 \\ x^2-3x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=4 \end{cases}$

$x_1=-1;\ x_2=4$

$x^2-3x+2=0$

$a+b+c=1-3+2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=1;\ x_2=2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ 1;\ 2;\ 4$.

Замечание. Способ замены переменной новой переменной применим при решении показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $(2x+1)^2-6(2x+1)+5=0$
2. $(x^2-7x)^2+2(x^2-7x-8)=64$

Ответ: 1. 0; 2. 2. −1; 2; 5; 8.

§ 6 Дробно-рациональные уравнения

Определение. Уравнение с одной переменной $f(x)=\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — рациональные выражения, хотя бы одно из которых содержит алгебраическую дробь, называют *дробно-рациональным*.

Общий вид дробно-рациональных уравнений: $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. При решении таких уравнений применяется условие равносильности:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}$$

Алгоритм 43 Решение дробно-рациональных уравнений

Способ I

1. Приведите уравнение к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$:

   1) перенесите все члены уравнения в левую часть
   2) приведите дроби к общему знаменателю
   3) раскройте скобки в числителе дроби (в знаменателе раскрывать не надо)
   4) приведите подобные слагаемые

2. Запишите за чертой условие равносильности:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}$$

3. Решите систему $\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}$ и найдите x.

4. Запишите ответ.



Решите уравнение $\frac{16}{x^2-16}+\frac{x}{x+4}=\frac{2}{x-4}$.

Решение.

1) $$\frac{16}{x^2-16}+\frac{x}{x+4}=\frac{2}{x-4}\Leftrightarrow\frac{16}{(x-4)(x+4)}+\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)}-\frac{2(x+4)}{(x-4)(x+4)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{16+x(x-4)-2(x+4)}{(x-4)(x+4)}=0\Leftrightarrow\frac{16+x^2-4x-2x-8}{(x-4)(x+4)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-6x+8}{(x-4)(x+4)}=0$$

2) $$\frac{x^2-6x+8}{(x-4)(x+4)}=0\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x+8=0\\(x-4)(x+4)\neq 0\end{cases}$$

$x^2-6x+8=0\Rightarrow x_1=2,\ x_2=4$

$(x-4)(x+4)\neq 0\Rightarrow x\neq 4,\ x\neq -4$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}P(x)=0\\Q(x)\neq 0\end{cases}$$

Значит, 4 — не является корнем

Ответ: 2.

Замечание. ОДЗ уравнения включена в условие равносильности ($Q(x)\neq 0$), что позволяет в процессе решения не приобрести посторонние корни.

Способ II

1. Найдите общий знаменатель дробей (ОЗ) — НОК знаменателей.
2. Найдите ОДЗ.
3. Умножьте на общий знаменатель все члены уравнения.
4. Сократите дроби.
5. Запишите целое уравнение (не раскрывая скобки).
6. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые.
7. Решите полученное уравнение.
8. Согласуйте корни с ОДЗ.
9. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. ЭМ. $\frac{6}{x^2-4x+3}-\frac{13-7x}{1-x}=\frac{3}{x-3}$

Решение.

1) ОЗ: $(x-3)(x-1)$

2) ОДЗ: $(x-3)(x-1)\neq 0$

$(-\infty;\,1)\cup(1;\,3)\cup(3;\,+\infty)$

$x^2-4x+3=0$

$1-4+3=0\Rightarrow$

$x_1=1,\ x_2=3$

Дробь $\frac{a}{b}$ имеет смысл, если $b\neq 0$

3) $\frac{6(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)}-\frac{(13-7x)\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}(x-3)}{\underset{1}{\cancel{1-x}}}=\frac{3(x-1)(x-3)}{x-3}$

$6+(13-7x)(x-3)=3(x-1)$

$6+13x-7x^2-39+21x-3x+3=0$

$-7x^2+31x-30=0 \quad \big|\cdot(-1)$

$7x^2-31x+30=0$

$x_1=\frac{31+11}{14}=3$

$x_2=\frac{31-11}{14}=\frac{20}{14}=\frac{10}{7}$

$a=7,\ b=-31,\ c=30$

$D=b^2-4ac=961-840=121>0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

4) 3 — не удовлетворяет ОДЗ

$\frac{10}{7}$ — принадлежит ОДЗ

Ответ: $\frac{10}{7}$.

Полезный совет. Если в уравнении есть повторяющееся выражение, то замените его новой переменной и примените алгоритм решения, а затем вернитесь к замене и найдите искомую неизвестную.

2. $\dfrac{12}{x^2+2x}-\dfrac{3}{x^2+2x-2}=1$

Решение.

1) ОДЗ: $(-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1-\sqrt{3}; -2) \cup$
$\cup (-2; 0) \cup (0; -1+\sqrt{3}) \cup$
$\cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$

$-4 \quad -3 \quad -1-\sqrt{3} \quad -2 \quad 0 \quad -1+\sqrt{3} \quad 1 \quad 2 \quad x$

Дробь $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл, если $b \neq 0$

$x^2+2x \neq 0,\ x(x+2) \neq 0$

$x \neq 0,\ x \neq -2$

$x^2+2x-2 \neq 0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$

$x \neq -1+\sqrt{3},\ x \neq -1-\sqrt{3}$

2) Введем новую переменную $x^2+2x=t$ и решим уравнение:

ОЗ: $t(t-2)$

3) $\dfrac{12\backslash^{t(t-2)}}{t}-\dfrac{3\backslash^{t(t-2)}}{t-2}=1\backslash^{t(t-2)}$

4) $\Rightarrow 12(t-2)-3t=t(t-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 12t-24-3t-t^2+2t=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -t^2+11t-24=0 \mid \cdot(-1) \Rightarrow$

5) $\Rightarrow t^2-11t+24=0$

$t^2-11t+24=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=11 \\ t_1 \cdot t_2=24 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=8 \end{array}\right.$

6) $\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=8 \end{array}\right. \\ t=x^2+2x \end{cases}$

7) $\left[\begin{array}{l} x^2+2x=3 \\ x^2+2x=8 \end{array}\right. \Rightarrow$

$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ x^2+2x-8=0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=-4 \\ x=2 \end{array}\right.$$

8) Числа −4, −3, 1, 2 входят в ОДЗ

Ответ: −4; −3; 1; 2.

Замечание. Некоторые пункты алгоритма выполняются в процессе решения последовательно, не разбивая процесс на отдельные действия. Можно не находить ОДЗ, а сделать проверку всех корней.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $\dfrac{2}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x-1}{x^3+1}$

2. $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x-2}{x+2}$

Ответ: 1. 2. 2. −2,5; 0.

§ 7 Решение задач при помощи уравнений

Алгоритм 44 Решение задач при помощи уравнений

1. Запишите краткое условие задачи, обозначив известные величины буквами, например a, b, c, а неизвестные — буквами x, y, z и др.
2. Составьте общую формулу решения задачи по условию.
3. Выберите наименьшую искомую величину, примите ее за x, выразите через x известные величины a, b, c.
4. Подставьте в формулу решения величины a, b, c, выраженные через x.

5. Решите уравнение и отберите корни, удовлетворяющие условию задачи.
6. Запишите ответ (полностью по требованию задачи).

Задача 1. Длина садового участка на 10 м больше его ширины. Площадь участка решили увеличить на 400 м^2. Для этого длину увеличили на 10 м, а ширину — на 2 м. Найдите площадь нового участка.

Решение.

1) *Дано:*

длина	a	$> b$ на 10 м	$a + 10$ (м)	$S_{новая} > S_{старая}$ на 400 м^2
ширина	b	— меньшая	$b + 2$ (м)	

Найти: $S_{новая}$

2) Общая формула решения: $S_{новая} - S_{старая} = 400$

3) Пусть $b = x$ (м), тогда $a = x + 10$ (м)

$S_{старая} = x(x + 10)$ (м^2) | $S = ab$

Новые стороны $a + 10$ и $b + 2$ выразим через x:

$a_н = x + 10 + 10 = x + 20$ (м); $b_н = x + 2$ (м)

$S_{новая} = (x + 20)(x + 2)$ (м^2) | $S_{новая} = a_н b_н$

4) Подставим в общую формулу решения значения $S_{старая}$ и $S_{новая}$:

$(x + 20)(x + 2) - x(x + 10) = 400$ | ОДЗ: $x > 0$ по условию задачи

5) Решим уравнение:

$x^2 + 20x + 2x + 40 - x^2 - 10x = 400 \Leftrightarrow 12x = 360 \Leftrightarrow x = 30;$

$30 > 0$

$b = 30$ (м); $a = 30 + 10 = 40$ (м), тогда $S = 30 \cdot 40 = 1200$ (м^2)

$S_{новая} = 1200 + 400 = 1600$ (м^2)

Ответ: новая площадь садового участка равна 1600 м^2.

Задача **2. ЕГЭ.** Катер прошел 45 км по течению реки и 35 км против течения реки за то же самое время, что он проходит 80 км в стоячей воде. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение.

1) *Дано:*

	s, км	v, км/ч	t, ч
по течению	45	$v_1 = x + 3$	t_1
против течения	35	$v_2 = x - 3$	t_2
в стоячей воде	80	$v_с = x$; $v_{реки} = 3$	t_3

Найти: собственную скорость катера

2) Формула решения: $t_1 + t_2 = t_3$

3) Пусть $v_с = x$ (км/ч), тогда $v_1 = x + 3$ (км/ч), $v_2 = x - 3$ (км/ч)

Найдем $t_1 = \frac{45}{x+3}$ (ч), $t_2 = \frac{35}{x-3}$ (ч), $t_3 = \frac{80}{x}$ (ч) | $t = \frac{S}{v}$

4) Подставим t_3; t_1; t_2 в формулу решения: $t_1 + t_2 = t_3$.

$$\frac{45}{x+3} + \frac{35}{x-3} = \frac{80}{x}$$

5) Решим уравнение:

$$\frac{45x(x-3)(x+3)}{x+3} + \frac{35x(x-3)(x+3)}{x-3} =$$

$$= \frac{80x(x-3)(x+3)}{x};$$

$45x(x-3) + 35x(x+3) =$

$= 80(x-3)(x+3);$

$45x^2 - 135x + 35x^2 + 105x - 80x^2 + 720 = 0;$

$-30x + 720 = 0 \Rightarrow x = 24;$

$24 > 3 \Rightarrow v_с = 24$ км/ч

ОЗ: $x(x-3)(x+3) \neq 0$

ОДЗ по условию задачи:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

$80(x-3)(x+3) =$

$= 80(x^2 - 9)$

Ответ: собственная скорость катера 24 км/ч.

П о л е з н ы й с о в е т. При решении задач на движение и на работу формулу решения составляют обычно относительно времени, если оно неизвестно по смыслу задачи.

При решении задач на покупку товара формулу решения составляют относительно количества товара (возможны и другие формулы, в зависимости от условия задач).

Решения задач на работу и покупку товара аналогичны решениям задач на движение.

Приведем таблицу зависимостей величин в условиях таких задач.

s — путь v — скорость t — время	A — работа p — производительность t — время	C — стоимость товара r — стоимость единицы товара (цена) q — количество товара
$s = v \cdot t$ $v = s : t$ $t = s : v$	$A = p \cdot t$ $p = A : t$ $t = A : p$	$C = q \cdot r$ $r = C : q$ $q = C : r$

***Задача* 3. ЭМ.** Бригада рабочих должна была за несколько дней изготовить 216 деталей. Первые 3 дня бригада выполняла установленную норму, а потом стала изготавливать на 8 деталей в день больше. Поэтому за 1 день до срока было изготовлено 232 детали. Сколько деталей в день стала изготавливать бригада?

Решение.

1) *Дано:*

p	A	t
a деталей в день по плану	216 деталей по плану	t по плану
$b > a$ — на 8 деталей в день	232 детали изготовила	$t - 1$ реально, из них 3 дня по a деталей

Найти: сколько деталей в день стала изготавливать бригада?

2) Формула решения: $t_{\text{по плану}} - 1 = 3 + t = t_{\text{реально}}$ (по условию реально работали на 1 день меньше, чем планировали, $t_{\text{реально}}$ состоит из 3 дней и t дней с увеличенной нормой в день).

3) Пусть $a = x$ (деталей) в день — по плану, $t_{\text{по плану}} = \dfrac{216}{x}$ дней; $3x$ деталей сделали за 3 дня

$b = x + 8$ (деталей) в день делали реально

$232-3x$ (деталей) делали при норме $x+8$ деталей в день:

$$t=\frac{232-3x}{x+8},\quad t_{\text{реально}}=\frac{232-3x}{x+8}+3 \text{ (дней)}$$

4) Подставим в формулу решения $t_{\text{по плану}}-1=t_{\text{реально}}$ выраженные через x значения $t_{\text{по плану}}$ и $t_{\text{реально}}$:

$$\frac{232-3x}{x+8}+3=\frac{216}{x}-1$$

По условию задачи ОДЗ: $x>0$
ОЗ: $x(x+8)\neq 0$

5) Решим уравнение:

$$\frac{232-3x^{\backslash x(x+8)}}{x+8}+4^{\backslash x(x+8)}-\frac{216^{\backslash x(x+8)}}{x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (232-3x)x+4(x^2+8x)-216(x+8)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 232x-3x^2+4x^2+32x-216x-216\cdot 8=0 \Leftrightarrow x^2+48x-1728=0$$

$x_{1,2}=-24\pm\sqrt{576+1728}=-24\pm 48$

$x_1=-24+48=24,\ x>0$

$x_2=-24-48<0$ — посторонний

$x^2+px+q=0$

$p=48=2m \Rightarrow m=24;\ q=-1728$

$x_{1,2}=-m\pm\sqrt{m^2-q}$

$a=24$ детали в день делали по плану, значит, $b=24+8=32$ детали в день стала изготавливать бригада.

Ответ: бригада стала изготавливать 32 детали в день.

§ 8 Модуль числа. Уравнения с модулем

Определение. *Модуль*, или *абсолютная величина*, неотрицательного числа есть само число: $|a|=a$, если $a\geq 0$. Модуль отрицательного числа ($a<0$) есть число, ему противоположное: $|a|=-a$, если $a<0$.

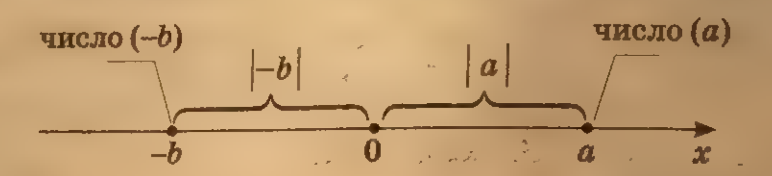
Символическая запись определения модуля:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geq 0 \\ -a, \text{ если } a<0 \end{cases} \Rightarrow |a|\geq 0$$

Геометрическое изображение модуля числа

Определение. *Модуль числа a* — это расстояние от нуля до точки, изображающей число на координатной оси.

Модуль числа — это длина отрезка оси Ox, поэтому $|a| \geq 0$; само число изображается точкой на оси.



Свойства модуля

1. $|a| \geq 0$
2. $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$
3. $|a| = |-a|$; $|a-b| = |b-a|$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
6. $|a^n| = |a|^n$, a — любое, $n = 2k$ — четное число
7. $|a^n| = -a^n$, $a < 0$, $n = 2k+1$ — нечетное число

Например, проверим свойства 2, 4 и 5 модулей чисел:

а) $|-3+5-8| \leq |-3|+|5|+|-8| \Leftrightarrow$
$|-6| \leq 16 \Leftrightarrow 6 \leq 16$ — истина

$|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

б) $|-3 \cdot 5| = |-3| \cdot |5| \Leftrightarrow |-15| =$
$= 3 \cdot 5 \Leftrightarrow 15 = 15$ — истина

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

в) $\left|\dfrac{-8}{15}\right| = \dfrac{|-8|}{|15|} = \dfrac{8}{15}$ — истина

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Алгоритм 45. Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

I тип уравнений: $|x+a|=b$; $b \geq 0$ — число

1. Запишите за чертой определение модуля:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

2. Примените определение модуля к решению задания и запишите два уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x+a=b \\ x+a=-b \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} x+a \geq 0, \text{ тогда } x+a=b \\ x+a<0, \text{ тогда } -(x+a)=b \Leftrightarrow x+a=-b \end{array}$$

3. Решите уравнения и найдите два значения x_1 и x_2.

4. Запишите ответ.



Решите уравнение $|x-3|=4$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} x-3=4 \\ x-3=-4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-1 \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad |x|=a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, \text{ если } a \geq 0 \\ x=-a, \text{ если } a<0 \end{array}\right.$$

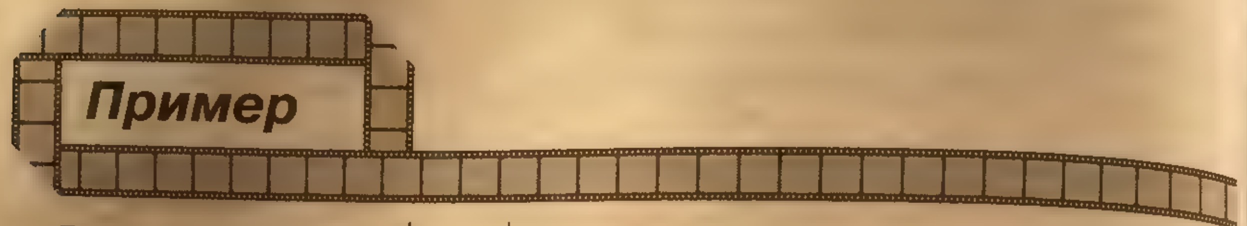
Ответ: -1; 7.

II тип уравнений: $|f(x)|=\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции

1. Запишите ОДЗ: $\varphi(x) \geq 0$ $\quad \Big| \quad |a| \geq 0$

2. Решите два уравнения с учетом ОДЗ: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x) \\ f(x)=-\varphi(x) \end{array}\right. \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$

3. Выберите корни с учетом ОДЗ.
4. Запишите ответ.



Решите уравнение $|2x-7|=3-x$.

<u>Решение.</u>

ОДЗ: $3-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 3$

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&2x-7=3-x\\&2x-7=x-3\end{aligned}\right.\\x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}&3x=10\\&x=4\end{aligned}\right.\\x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=3\frac{1}{3}\\&x=4\end{aligned}\right.\\x\le 3\end{cases}$$

$|a|\ge 0$

$-(3-x)=x-3$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}f(x)=\varphi(x)\\f(x)=-\varphi(x)\end{cases}\\&\varphi(x)\ge 0\end{aligned}\right.$$

Ответ: нет решений.

III тип уравнений: $|f(x)|=|g(x)|$, **где** $f(x)$ **и** $g(x)$ **— функции**

1. Решите совокупность уравнений: $\left[\begin{aligned}&f(x)=g(x)\\&f(x)=-g(x)\end{aligned}\right.$
2. Запишите ответ.



Решите уравнение $|3x+5|=|2-x|$.

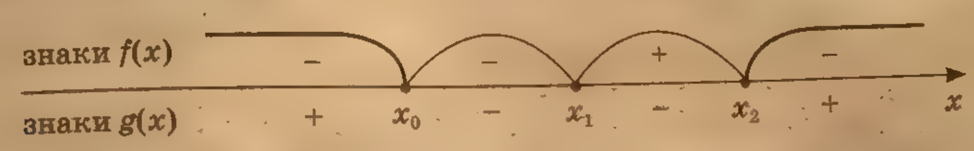
$$\left[\begin{aligned}&3x+5=2-x\\&3x+5=x-2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&4x=-3\\&2x=-7\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-\frac{3}{4}\\&x=-3{,}5\end{aligned}\right.$$

$$|a|=|b|\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=b\\&a=-b\end{aligned}\right.$$

Ответ: $-\frac{3}{4}$; $-3{,}5$.

IV тип уравнений: $|f(x)| \pm |g(x)| = \varphi(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ — функции

1. Найдите корни каждого выражения, стоящего под знаком модуля:
$$f(x)=0;\ g(x)=0$$
2. Найдите знаки выражений, стоящих в скобках модуля на каждом промежутке (через пробное число).
3. Отметьте числа-корни (п. 1) на оси Ox, обозначьте промежутки, на которые они разбивают ось, дугами и подпишите знаки:



4. Решите уравнение, снимая знак модуля на промежутке $(-\infty; x_0]$ и учитывая знаки выражений при $x \le x_0$. Если x_0 не принадлежит промежутку, то x_0 не является корнем уравнения.
5. Повторите операцию пункта 4 на каждом следующем промежутке:
$$(x_0; x_1],\ (x_1; x_2],\ (x_2; +\infty)$$
6. Запишите ответ: значения x_0 из всех промежутков или сам промежуток.

Полезные советы

1. Для определения знака выражения на промежутке возьмите число из этого промежутка, подставьте его в выражение под знаком модуля и определите знак выражения на каждом промежутке.

2. Промежутки берите с включенным правым концом, так как первый промежуток слева $(-\infty; x_0]$ всегда полуоткрытый, тогда последний промежуток справа всегда будет открытый $(x_n; +\infty)$ и каждый конец промежутка обязательно войдет в решение один раз.



Решите уравнения.

1. ЭМ. $|16-9x|-|9x-5|=11$

2. $|3-x|+|x-1|=2x-3$

Решение.

1. 1) Найдем корни выражений, стоящих под знаком модуля:

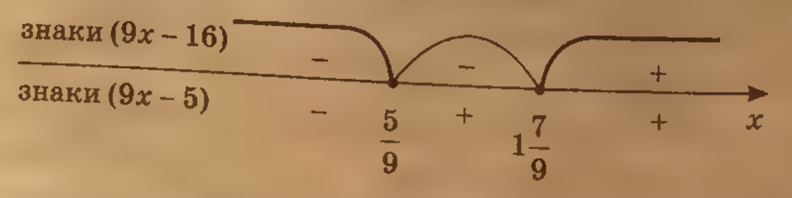
$|16-9x|-|9x-5|=11 \Leftrightarrow |9x-16|-|9x-5|=11$ | $|b-a|=|a-b|$

$$\left[\begin{array}{l}9x-16=0\\9x-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{16}{9}=1\dfrac{7}{9}\\x=\dfrac{5}{9}\end{array}\right.$$

2) Определим знаки выражений:

	$9x-16$	$9x-5$
а) $\left(-\infty;\ \dfrac{5}{9}\right]$, пусть $x=0$	$0-16<0$	$0-5<0$
б) $\left(\dfrac{5}{9};\ 1\dfrac{7}{9}\right]$, пусть $x=1$	$9-16<0$	$9-5>0$
в) $\left(1\dfrac{7}{9};\ +\infty\right)$, пусть $x=2$	$18-16>0$	$18-5>0$

3) Отметим на оси Ox знаки выражений:



4) Решим уравнение, раскрывая скобки модуля, учитывая знаки выражений на каждом промежутке:

а) $\begin{cases}16-9x-(5-9x)=11\\x\le\dfrac{5}{9}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}16-9x-5+9x=11\\x\le\dfrac{5}{9}\end{cases} \Leftrightarrow$

$|a-b|=b-a$, если $a<b$

$|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\ge0\\-a, \text{ если } a<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11=11 \text{ — тождество} \\ x \le \dfrac{5}{9} \text{ — решение} \end{cases}$

б) $\begin{cases} 16-9x-(9x-5)=11 \\ \dfrac{5}{9}<x\le 1\dfrac{7}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-9x-9x+5=11 \\ \dfrac{5}{9}<x\le 1\dfrac{7}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -18x=11-21 \\ \dfrac{5}{9}<x\le 1\dfrac{7}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{9} \\ \dfrac{5}{9}<x\le 1\dfrac{7}{9} \end{cases}$ — нет решений

в) $\begin{cases} 9x-16-(9x-5)=11 \\ x>1\dfrac{7}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11=11 \text{ (ложно)} \\ x>1\dfrac{7}{9} \end{cases}$ — нет решений

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{5}{9}\right]$.

2. $|3-x|+|x-1|=2x-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-3|+|x-1|=2x-3$

$|a-b|=|b-a|$

$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\ge 0 \\ -a, \text{ если } a<0 \end{cases}$

1) $\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$

2) знаки $(x-3)$: $-$ (до 1), $-$ (между 1 и 3), $+$ (после 3)

знаки $(x-1)$: $-$ (до 1), $+$ (между 1 и 3), $+$ (после 3); точки 1, 3 на оси x

(Знаки выражения на промежутках проверим в уме.)

3) Снимем знак модуля и решим уравнение на каждом промежутке:

а) $\begin{cases} 3-x+1-x=2x-3 \\ x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=7 \\ x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{4} \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow$ — нет решений

б) $\begin{cases} 3-x+x-1=2x-3 \\ 1<x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ 1<x\le 3 \end{cases} \Rightarrow x=2{,}5$ — корень

в) $\begin{cases} x-3+x-1=2x-3 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=-3 \text{ (ложно)} \\ x>3 \end{cases}$ — нет решений

Ответ: 2,5.

Проверь себя!

Решите уравнения (ЭМ).

1. $|2x-3|=3-2x$ 2. $|5x-13|-|6-5x|=7$ 3. $x^2-4|x|-1=0$

Ответ: 1. $(-\infty;\ 1{,}5]$. 2. $(-\infty;\ 1{,}2]$. 3. $-2-\sqrt{5}$; $2+\sqrt{5}$.

§ 9 Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

I тип

$|f(x)|\le g(x)$

Решение.

$\begin{cases} f(x)\ge -g(x) \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$ или $-g(x)\le f(x)\le g(x)$

II тип

$|f(x)|\ge g(x)$

Решение.

$\left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x) \\ f(x)\le -g(x) \end{array}\right.$

Алгоритм 46 Решение неравенства $|f(x)|\le a$ (a — число)

1. Запишите условие решения неравенства за чертой:

$\begin{cases} a\ge 0 \\ -a\le f(x)\le a, \end{cases}$ если $a<0$, то решений нет

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x)\ge -a \\ f(x)\le a \end{cases}$ или двойное неравенство, используя свойства неравенств.

3. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $|5x+2|<3$ 2. $|x^2-2x|<3$

Решение.

1. $-3<5x+2<3;$ | -2 | $|f(x)|<a,\ a\geq 0 \Leftrightarrow$

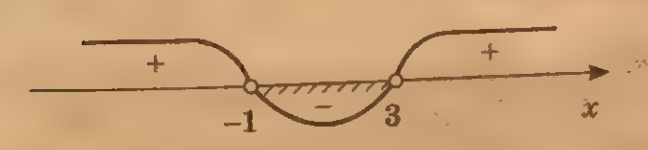
$-5<5x<1;$ | $:5$ | $\Leftrightarrow -a<f(x)<a$

$-1<x<\dfrac{1}{5}$

Ответ: $\left(-1;\ \dfrac{1}{5}\right)$.

2. $\begin{cases} x^2-2x<3 \\ x^2-2x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ x^2-2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)<0 \\ x\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3 \\ x\in R \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<3$



| $|f(x)|<a,\ a\geq 0$

$\begin{cases} f(x)>-a \\ f(x)<a \end{cases}$

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$\begin{cases} x^2-2x+3>0 \\ \dfrac{D}{4}=1-3<0 \Rightarrow x\in R \\ a>0 \end{cases}$

Ответ: $(-1;\ 3)$.

Алгоритм 47 **Решение неравенства $|f(x)|\geq a$ (a — число)**

1. Запишите условие решения неравенства за чертой:

если $a>0$, то $\left[\begin{array}{l} f(x)\geq a \\ f(x)\leq -a \end{array}\right.$ если $a<0$, то $x\in D(f)$

2. Решите каждое неравенство.

3. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $|1-2x|>4$ 2. $|x-25|>-100$

Решение.

1. $|1-2x|>4 \Leftrightarrow |2x-1|>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1>4\\2x-1<-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2,5\\x<-1,5\end{array}\right.$

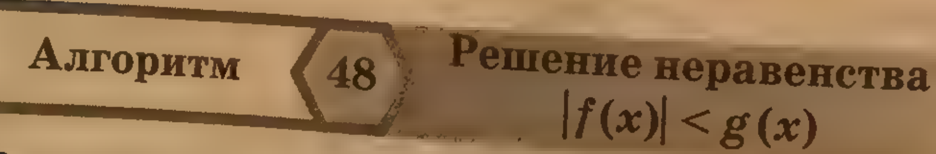
$|a-b|=|b-a|$

Если $|f(x)|>a$, то $\left[\begin{array}{l}f(x)>a\\f(x)<-a\end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-1,5)\cup(2,5;+\infty)$.

2. $|x-25|>-100$; по определению модуля $|x-25|\geq 0$, значит, неравенство $|x-25|>-100$ выполняется при $x\in \boldsymbol{R}$.

Ответ: $x\in \boldsymbol{R}$.



Решение неравенства $|f(x)|<g(x)$

1. Запишите условие решения неравенства за чертой:

$$\begin{cases}f(x)>-g(x)\\f(x)<g(x)\\g(x)>0\end{cases}$$

2. Составьте и решите систему неравенств по условию пункта 1.
3. Изобразите решение неравенств на одной оси.
4. Запишите ответ.



Решите неравенство $|3x-2|<x-1$.

Решение.

$$\underbrace{|3x-2|}_{f(x)}<\underbrace{x-1}_{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2>1-x \\ 3x-2<x-1 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x>3 \\ 2x<1 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0{,}75 \\ x<0{,}5 \\ x>1 \end{cases} \text{ — нет решений}$$

$$|f(x)|<g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)>-g(x) \\ f(x)<g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$$

$$-(x-1)=1-x$$

Ответ: нет решений.

Алгоритм 49. Решение неравенства $|f(x)|\geq g(x)$

1. Запишите условие решения неравенства за чертой:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$$

2. Составьте и решите каждое неравенство по условию пункта 1.
3. Изобразите решение неравенств на осях.
4. Запишите ответ.



Решите неравенства.

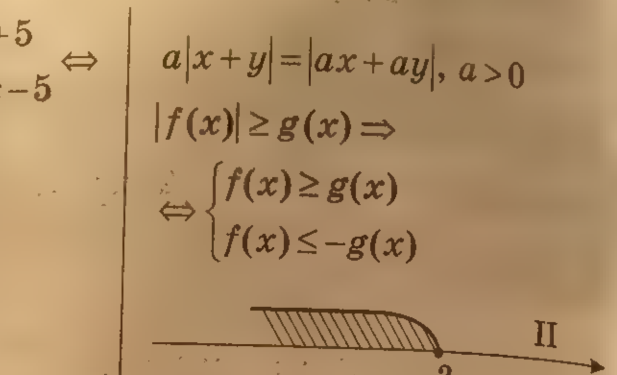
1. ЭМ. $3|x+1|\geq x+5$
2. ЭМ. $x^2-|5x-3|-x<2$

__*Решение.*__

1. $3\cdot\underbrace{|x+1|}_{f(x)}\ge\underbrace{x+5}_{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+3\ge x+5\\3x+3\le -x-5\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x\ge 2\\4x\le -8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x\ge 1 & \text{(I)}\\x\le -2 & \text{(II)}\end{array}\right.$

I



$a|x+y|=|ax+ay|,\ a>0$

$|f(x)|\ge g(x)\Rightarrow$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)\ge g(x)\\f(x)\le -g(x)\end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\,-2]\cup[1;\,+\infty)$.

2. $x^2-|5x-3|-x<2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\underbrace{|5x-3|}_{f(x)}>\underbrace{x^2-x-2}_{g(x)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x-3>x^2-x-2\\5x-3<-x^2+x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+1<0\\x^2+4x-5<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$

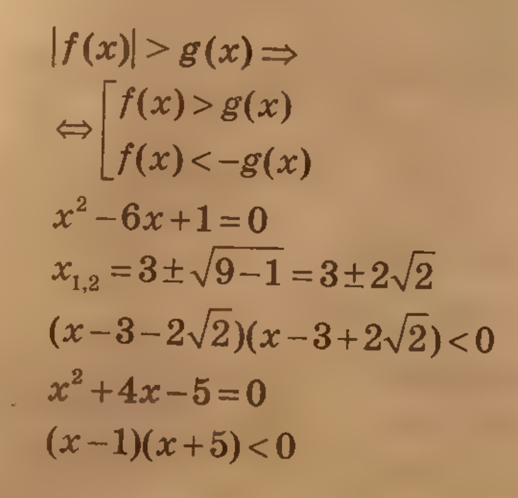
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(3-2\sqrt{2};\ 3+2\sqrt{2})\\x\in(-5;\ 1)\end{array}\right.$

$x\in(3-2\sqrt{2};\ 3+2\sqrt{2})\ \cup$

$\cup\,(-5;\ 1)$

$x\in(-5;\ 3+2\sqrt{2})$

Ответ: $(-5;\ 3+2\sqrt{2})$.



$|f(x)|>g(x)\Rightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)>g(x)\\f(x)<-g(x)\end{array}\right.$

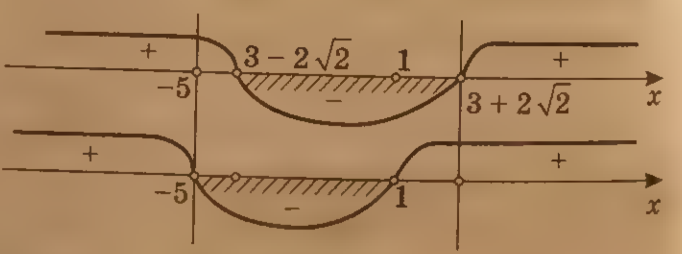
$x^2-6x+1=0$

$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm2\sqrt{2}$

$(x-3-2\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2})<0$

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)<0$



Алгоритм 50 Решение неравенств $|f(x)|\gtrless|g(x)|$

1. Возведите в квадрат обе части неравенства $(f(x))^2\gtrless(g(x))^2$

($|a|>0$ и если $|a|\gtrless|b|$, то $|a|^2\gtrless|b|^2\Leftrightarrow a^2\gtrless b^2$)

2. Решите неравенство без знака модуля.
3. Запишите ответ.



Решите неравенство $|x-6|>|x^2-5x+9|$ и укажите его наименьшее целое положительное решение.

Решение.

$|x-6|>|x^2-5x+9| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-5x+9)^2-(x-6)^2<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-5x+9-x+6)\cdot(x^2-5x+9+x-6)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-6x+15)(x^2-4x+3)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)<0$



Решение неравенства: (1; 3)
Наименьшее целое решение: 2

$|a|^2>|b|^2 \Leftrightarrow a^2>b^2$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$x^2-6x+15>0$
при $x \in R$, так как
$D=36-60<0,\ a>0$
$x^2-4x+3=0$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1$
$x_1=3,\ x_2=1$
$a\cdot b<0$
если $a>0$, то $b<0$

Ответ: 2.

Попробуй-ка реши!

Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства

$$|x+1|<|2x^2+x-1|$$

Ответ: 2.

Алгоритм 51 Решение неравенства с несколькими модулями

Пусть надо решить неравенство $|f(x)|-\varphi(x)<|g(x)|+|y(x)|$.

1. Решите уравнения $f(x)=0$, $g(x)=0$, $y(x)=0$ (функция $\varphi(x)$ без модуля и не меняет свой знак).
2. Отметьте все числа-корни уравнений пункта 1 на оси Ox; обозначьте промежутки, на которые они разбивают ось, дугами.



3. Определите знаки функций $f(x)$, $g(x)$, $y(x)$ на каждом промежутке (через пробное число).
4. Отметьте знаки функций $f(x)$, $g(x)$, $y(x)$ на оси (в порядке их нахождения в примере) или занесите их в таблицу примерно так:

x	$(-\infty; x_1]$	$(x_1; x_2]$	$(x_2; x_3]$	...	$(x_n; +\infty)$
$f(x)$	+	–	–	+	+
$g(x)$	–	–	+	–	+
$y(x)$	–	+	–	+	+

5. Раскройте знак модуля с учетом знаков функций $f(x)$, $g(x)$, $y(x)$ и решите системы, состоящие из неравенств на каждом промежутке и самого промежутка.
6. Запишите ответ в виде объединения промежутков (если граница смежных промежутков является решением, то запишите общий промежуток).

Пример

Решите неравенство $|x|+|x-3|>|1+x|$.

Решение.

1) $x=0$, $x_1=0$
$x-3=0$, $x_2=3$
$1+x=0$, $x_3=-1$

ОДЗ: $x \in R$
Знаки на оси в порядке написания модулей в примере

2) $---$ | $--+$ | $+-+$ | $+++$; точки -1, 0, 3, ось x

3) а) $\begin{cases} x \le -1 \\ -x-(x-3) > -1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -1$

(на оси: -1, 4, x)

Промежуток $(-\infty; -1]$ — решение

если $a<0$, то $|a|=-a$
если $a>b$, то $|a-b|=a-b$
если $a<b$, то $|a-b|=b-a$
если $a \ge 0$, то $|a|=a$
если $a \ge b$, то $|a-b|=a-b$

б) $\begin{cases} -1<x\le 0 \\ -x+3-x>1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x\le 0 \\ 3x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x\le 0 \\ x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$

(на оси: -1, 0, $\frac{2}{3}$, x)

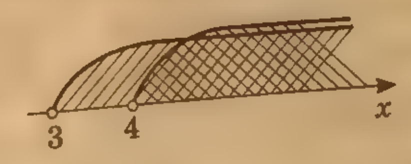
$(-1; 0]$ — решение

в) $\begin{cases} 0<x\le 3 \\ x+3-x>1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\le 3 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<2$



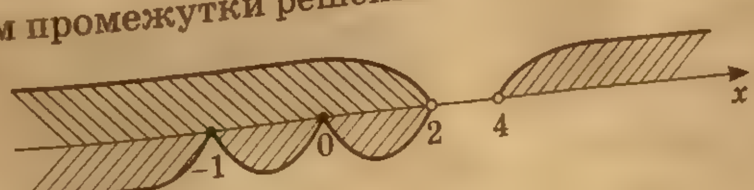
$(0; 2)$ — решение

г) $\begin{cases} x>3 \\ x+x-3>1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow x>4$



$(4; +\infty)$ — решение

4) Объединим промежутки решений.



Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

§ 10 Системы неравенств 1-й степени с одной переменной

($a > b$ во всех системах)

I. $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \Rightarrow x > a$

x больше большего

Ответ: $(a; +\infty)$.



II. $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \Rightarrow x < b$

x меньше меньшего

Ответ: $(-\infty; b)$.



Если неравенства строгие (> или <), то точки на оси изображают так: о.

III. $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$

Нет решения

Ответ: нет решения.



IV. $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases}$

$b \leq x \leq a$

Ответ: $[b; a]$.



Если неравенства нестрогие (≥ или ≤), то точки на оси изображают так: ●.

Замечания. 1. Круглая скобка в записи промежутка ставится, если крайние числа не входят в решение.

2. Квадратная скобка ставится в том случае, если крайние числа входят в решение: $[a; b]$, $[a; b)$ или $(a; b]$.

Например: $(-\infty; +\infty)$; $[2; 5)$ — 2 входит в решение, 5 не входит

Алгоритм 52. Решение системы неравенств 1-й степени с одной переменной

1. Перенесите все члены, содержащие x, в одну часть неравенств, а числа в другую (изменив их знак на противоположный) и приведите каждое неравенство к виду $ax > b$ или $ax < b$.

2. Приведите систему неравенств к одному из случаев:

$$\begin{cases} x \ge a \\ x \ge b \end{cases} \quad \begin{cases} x \le a \\ x \le b \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge a \\ x \le b \end{cases}$$ (или строгие неравенства)

3. Изобразите на одной оси решение каждого неравенства системы и выберите ответ (пересечение штриховок).

4. Запишите ответ.



1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x+3 \le 2x+1 \\ 3x-2 \le 4x+2 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 3x+3 \le 2x+1 \\ 3x-2 \le 4x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2x \le 1-3 \\ -2-2 \le 4x-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ x \ge -4 \end{cases}$$

$a > b \Leftrightarrow b < a$

$$\begin{cases} x \le a \\ x \ge b \Leftrightarrow b \le x \le a \\ a > b \end{cases}$$

Ответ: $[-4; -2]$.

З а м е ч а н и е. Удобно переносить члены, содержащие x, в ту часть неравенства, где x получается с плюсом, а затем применить свойство: если $a > b$, то $b < a$.

2. Найдите наибольшее целое отрицательное число, являющееся решением системы

$$\begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x}{2} > x+5 \\ \frac{1}{8}(x+2) < -\frac{1}{7}(x-2) \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x}{2} > x+5 & \Big| \cdot 8 \\ \frac{1}{8}(x+2) < -\frac{1}{7}(x-2) & \Big| \cdot 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8 \cdot x}{8} - \frac{8 \cdot x}{4} + \frac{8 \cdot x}{2} > 8x+40 \\ \frac{56}{8}(x+2) < -\frac{56}{7}(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2x+4x>8x+40 \\ 7x+14<-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x<-40 \\ 15x<2 \end{cases} \begin{vmatrix} :5 \\ :15 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-8 \\ x<\dfrac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow x<-8$$

−9 −8 −7 x

Ответ: −9 — наибольшее целое число из промежутка $(-\infty; -8)$.

Замечание

Решение системы неравенств применяется в тех случаях, когда надо решить неравенства вида $\dfrac{x+a}{x+b} \geqslant 0$ или $(x+a)(x+b) \geqslant 0$, а также при нахождении области определения уравнений, неравенств и т. д.

3. Решите неравенство $\dfrac{x-2}{3-x} \geq 0$.

Решение.

$\dfrac{x-2}{3-x} \geq 0$, получим две системы:

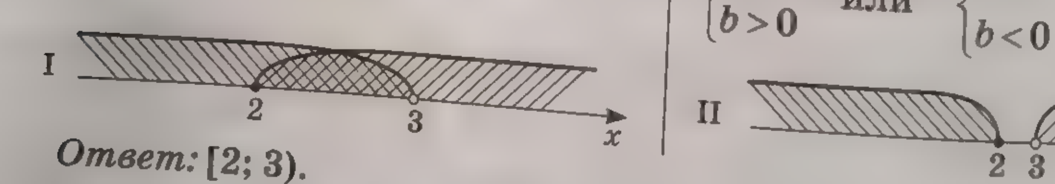
$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 3-x>0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x-2\leq 0 \\ 3-x<0 \end{cases} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x\geq 2 \\ x<3 \end{cases} \quad \text{(I)} \\ &\begin{cases} x\leq 2 \\ x>3 \end{cases} \quad \text{(II)} \end{aligned} \right.$$

ОДЗ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

$\dfrac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow$

a и b одного знака

$$\begin{cases} a\geq 0 \\ b>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a\leq 0 \\ b<0 \end{cases}$$



Ответ: [2; 3).

4. Решите неравенство $\dfrac{x-1}{2-x} < 1$.

Решение.

$$\frac{x-1}{2-x}<1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-x}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x-1-(2-x)}{2-x}<$$

$$<0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{2-x}<0 \Leftrightarrow$$

ОДЗ: $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Сравните дробь с 0, для этого перенесите 1 влево, и если $\dfrac{a}{b}<0$, то

$$\Rightarrow \left[\begin{cases}2x-3>0\\2-x<0\end{cases}\right. \atop \begin{cases}2x-3<0\\2-x>0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases}x>1{,}5\\x>2\end{cases} \text{(I)} \atop \begin{cases}x>1{,}5\\x<2\end{cases} \text{(II)}\right.$$

$\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$ или $\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$

I: 1,5; 2; x

II: 1,5; 2; x

Ответ: $(-\infty; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$.

5. Найдите все целые числа, являющиеся решениями системы

$$\begin{cases}1-0{,}5x \ge 0\\-\dfrac{x+5}{5} \le -1\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}1-0{,}5x \ge 0 & |\cdot 2\\-\dfrac{x+5}{5} \le -1 & |\cdot(-5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-x \ge 0\\x+5 \ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \le 2\\x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$$

ОДЗ: $x \in R$

$a < b$ и $c < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ac > bc$

0; 2; x

Ответ: 0; 1; 2.

§ 11 Метод интервалов при решении дробно-рациональных неравенств

Как учитывать свойства функций, входящих в неравенства

1. Если функция строго возрастает на некотором интервале и имеет корень, то слева от корня она отрицательна, а справа положительна,

т. е. при переходе через корень функция меняет знак и сохраняет его постоянным на каждом промежутке (рис. 111).

Для убывающей функции: слева от корня «+», справа «−» (рис. 112).

2. Обе части неравенства можно разделить на положительный множитель (например, на x^2+1, ax^2+bx+c при $a>0$, $D<0$ и т. д.). Знак неравенства при этом не меняется.

3. Если неравенства содержат функцию в четной степени, например x^2, $(x+1)^2$, $(x+1)^4$ и т. п., необходимо учитывать, что она имеет кратные корни, при переходе через которые знак ***не меняется***.

4. Знак линейной функции $y=ax+b$, $a\neq0$, совпадает со знаком коэффициента a ***справа*** от корня; знак квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$, совпадает со знаком старшего коэффициента ***справа*** от большего корня.

5. Знак произведения или частного функций на данном интервале определяется количеством только отрицательных знаков функций, входящих в неравенство. Если знаков «−» четное число, то в ответе знак «+» (>0); если минусов нечетное число, то в ответе знак «−» (<0).

Знак множителя определяется через пробное число, взятое из данного интервала, где функция непрерывна (или для множителей kx и ax^2+bx+c по знаку старшего коэффициента на правом промежутке, п. 4).

6. Решение неравенств $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{\varphi(x)\cdot\alpha(x)}>0$ и $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{\varphi(x)\cdot\alpha(x)}<0$ равносильно решению неравенств $f(x)\cdot g(x)\cdot\varphi(x)\cdot\alpha(x)>0$ и $f(x)\cdot g(x)\cdot\varphi(x)\cdot\alpha(x)<0$ на ОДЗ.

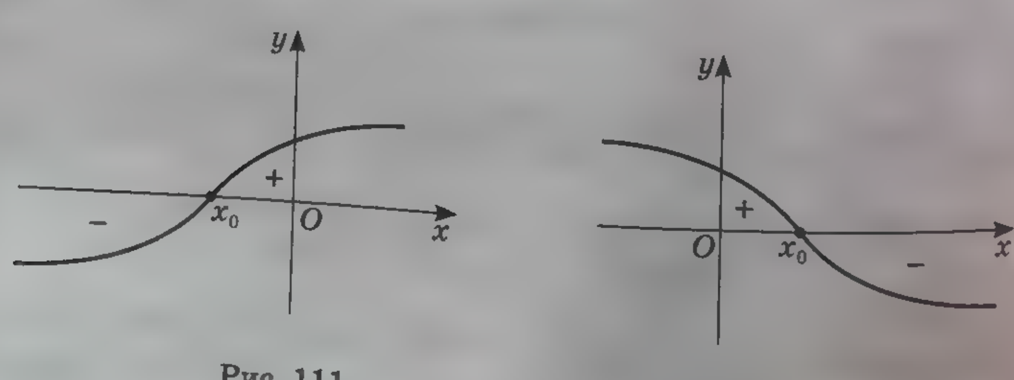


Рис. 111

Рис. 112

Алгоритм 53 Решение неравенства методом интервалов

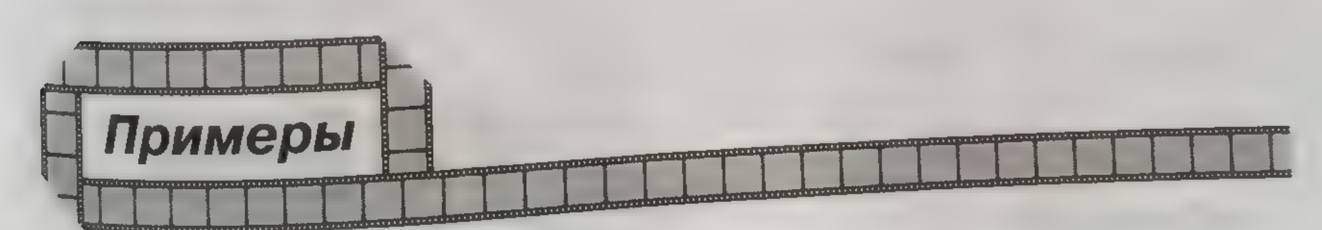
1. Найдите ОДЗ и запишите ее в форме промежутков.
2. Приведите неравенство к виду $f(x)\cdot g(x)\cdot \varphi(x) \gtrless 0$ или $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{\varphi(x)} \gtrless 0$,

   где $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ — функции
3. Приравняйте нулю каждый множитель и решите уравнения:

   $$f(x)=0,\ g(x)=0,\ \varphi(x)=0$$
4. Изобразите ось Ox и отметьте на ней ОДЗ и все корни (п. 3) (корни уравнений знаменателя изобразите кружочками (о, $x \neq x_0$), так как знаменатель не равен 0, а также корни числителя, если неравенство строгое (> 0; < 0)).
5. Изобразите промежутки, на которые разбивается ОДЗ, на оси Ox дугами.



6. Определите знак функции на правом (можно на любом) промежутке, а затем чередуйте знаки, если нет кратных корней ($x^2 = 0$; $(x-1)^2 = 0$) (см. свойство 3).
7. Выберите нужные промежутки из ОДЗ: если знак неравенства «> 0», то надо выбрать промежутки со знаком «+»; если знак неравенства «< 0», то — со знаком «−».
8. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $x(x+1)(2-x)>0$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$

2) Неравенство имеет вид, удобный для решения его методом интервалов.

3) $x = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$; $2 - x = 0$; $x = 2$

4)—5)

>0 >0

$+$ $-$ $+$ $-$

-1 0 2 x

6) Знак функции при $x = 3$ (на интервале $(2; +\infty)$): $3(3 + 1)(2 - 3) < 0$

7) Знак неравенства «> 0», значит, выберем промежутки со знаком «+»

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$.

2. ЕГЭ. $\dfrac{1}{x+3} - 1 > 0$

Решение.

1) ОДЗ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$

2) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{x+3}{x+3} = \dfrac{1-(x+3)}{x+3} = \dfrac{1-x-3}{x+3} = \dfrac{-2-x}{x+3}$;

$\dfrac{-x-2}{x+3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+3} < 0$

3) $x + 2 = 0$; $x + 3 = 0$; $x = -2$; $x = -3$

4—6)

$+$ $-$ $+$

-3 -2 x

Дробь $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл, если $b \neq 0$;

$x + 3 \neq 0$;

$x \neq -3$

Ответ: $(-3; -2)$.

3. $x^2(x+1)(5-x) \geq 0$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) Неравенство имеет вид, удобный для решения его методом интервалов.

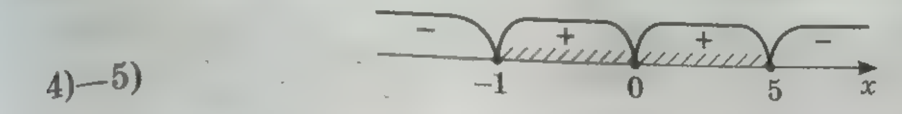
3) $x^2 = 0$, $x + 1 = 0$, $5 - x = 0$

$x_{1,2} = 0$; $x = -1$, $x = 5$

$x_{1,2} = 0$ — кратный корень, тогда знак $f(x)$ не меняйте при переходе через $x = 0$

$f(x) \geq 0$, знак «+»

4)—5)



6) Определим знак $f(x)$ на промежутке $[5; +\infty)$. Пусть $x=6$, тогда $6^2(6+1)(5-6)<0$.

Ответ: $[-1; 5]$.

4. ЭМ. $(3x^2-x-2)\cdot\sqrt{2x-1}\geq 0$

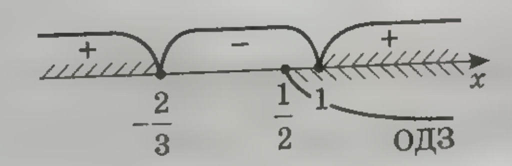
Решение.

1) ОДЗ: $[0,5; +\infty)$

2) $(3x^2-x-2)\cdot\sqrt{2x-1}\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2-x-2\geq 0$

3) $\begin{cases} 3x^2-x-2\geq 0 \\ x\geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\geq 0 \\ x\geq 0,5 \end{cases}$

4)—5)



$\sqrt{a}$ имеет смысл, если $a\geq 0 \Rightarrow 2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 0,5$

$a\cdot b\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a\leq 0 \\ b\leq 0 \end{cases}$

$\sqrt{2x-1}\geq 0$ по определению арифметического корня, тогда

$3x^2-x-2\geq 0$

$x_1=1,\ x_2=-\dfrac{2}{3}$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Включите $x_0=0,5$ в ответ, так как $\sqrt{2\cdot 0,5-1}=0$

Ответ: $\{0,5\}\cup[1; +\infty)$.

Попробуй не реши!

Решите неравенства.

1. ЭМ. $\dfrac{8x^2-2}{3-x}>0$

2. ЭМ. $\dfrac{(x+11)(2x-5)}{3x}\leq 0$

3. ЭМ. $\dfrac{x^2-3x+2}{6+3x}>0$ **4. ЕГЭ.** $\dfrac{x+7}{(2x-1)(8-x)}\geq 0$

Ответ выбрать из решений: 1) $(-\infty;\ 0{,}5)\cup(8;\ +\infty)$;
2) $(-\infty;\ -7]\cup(0{,}5;\ 8)$; 3) $[-7;\ 1)\cup[8;\ +\infty)$; 4) $[-7;\ 0{,}5]\cup(8;\ +\infty)$

Ответ: **1.** $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ 3\right)$. **2.** $(-\infty;\ -11]\cup(0;\ 2{,}5]$.

3. $(-2;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$. **4.** Номер верного ответа: 2.

Попробуй-ка реши!

Решите неравенства.

1. ЭМ. $(3x-x^2-2)\sqrt{7x+4}<0$ **2. ЭМ.** $(7x+2)\sqrt{4x-3x^2-1}\leq 0$

3. $\dfrac{(2-x)(3-x)\sqrt{x+3}}{x^2(x+5)}\leq 0$

Ответ: **1.** $\left(-\dfrac{4}{7};\ 1\right)\cup(2;\ +\infty)$. **2.** $x_1=\dfrac{1}{3};\ x_2=1$. **3.** $[2;\ 3]\cup\{-3\}$.

Алгоритм 54 Решение квадратных неравенств $ax^2+bx+c\gtrless 0$

1. Решите уравнение $ax^2+bx+c=0$ и если есть корни, то перейдите к п. 2, если нет корней, то — к п. 4.
2. Разложите трехчлен на множители по формуле
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
3. Решите методом интервалов неравенство
$$a(x-x_1)(x-x_2)>0 \text{ или } a(x-x_1)(x-x_2)<0$$
(Если $a<0$, то разделите на a обе части неравенства, изменив его знак на противоположный.)
4. 1) Если $\begin{cases}D<0\\ a>0\end{cases}$, то $ax^2+bx+c>0$ при $x\in R$, а неравенство $ax^2+bx+c<0$ не имеет решений

2) если $\begin{cases} D<0 \\ a<0 \end{cases}$, то $ax^2+bx+c<0$ при $x \in R$, а неравенство $ax^2+bx+c>0$ не имеет решений

5. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $2x^2-3x-2<0$

2. $5x^2-10x \geq 0$

3. ЭМ. $\dfrac{x^2-14x-15}{10-4x}>0$

Решение.

1. 1) $2x^2-3x-2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{4}$

$x_1=2,\ x_2=-0,5$

2) $2(x-2)(x+0,5)<0$

3) + $-\frac{1}{2}$ − 2 + x

$D=b^2-4ac=9+16=25$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$a=2,\ a>0$,

то знак справа «+»

Ответ: $(-0,5;\ 2)$.

2. 1) $5x^2-10x=0$

$x_1=0,\ x_2=2$

2) $5x(x-2)\geq 0$

3) + 0 − 2 + x

$ax^2+bx=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{b}{a} \end{array}\right.$

$a=5>0$, то справа знак «+»

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$.

3. 1) ОДЗ: $(-\infty; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$

$x^2 - 14x - 15 = 0$

$x_1 = -1,\ x_2 = 15$

2) $\dfrac{x^2 - 14x - 15}{10 - 4x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-15)(x+1)}{2(5-2x)} > 0$

3) >0 >0

$+$ $-$ $+$ $-$

-1 $2,5$ 15 x

$\dfrac{a}{b}$ — имеет смысл,

если $b \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2,5$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \\ x_1 \cdot x_2 = -15 \end{cases}$ $\quad x_1 = -1,\ x_2 = 15$

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2,5; 15)$.

Проверь себя!

Решите неравенства.

1. $x^3 - 64x > 0$ **2.** $\dfrac{x^2 - 6x}{x^2 + 6x + 9} \leq 0$

Ответ: **1.** $(-8; 0) \cup (8; +\infty)$. **2.** $[0; 6]$.

Алгоритм 55. Решение квадратного неравенства с помощью схемы графика функции

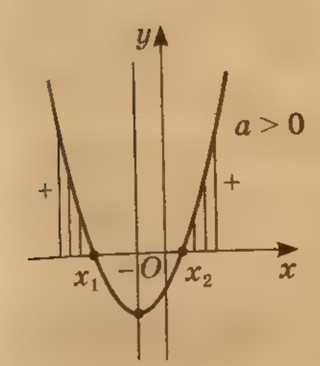
1. Найдите корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Определите знак коэффициента a и по нему направление ветвей параболы.
3. Постройте схему графика функции $y = ax^2 + bx + c$:
   1) отметьте на оси Ox корни уравнения (если они есть);
   2) проведите ось симметрии через середину отрезка $[x_1; x_2]$ (или через x_0 — единственный корень уравнения) параллельно оси Oy;
   3) изобразите на оси симметрии вершину параболы ниже оси Ox (произвольно), если $a > 0$, $D > 0$ (рис. 113, *а*), или выше оси Ox (произвольно), если $a < 0$, $D > 0$ (рис. 113, *г*).

Если x_0 — единственный корень, то вершина параболы в точке $(x_0; 0)$ (рис. 113, *б*, *д*).

Если корней нет и $a>0$, то вершину параболы изобразите произвольно над осью Ox (рис. 113, *в*), и если $a<0$ и $D<0$, то вершина — под осью Ox (рис. 113, *е*).

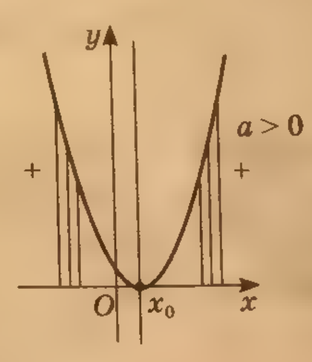
4. Изобразите решение неравенства, используя схему графика функции (см. рис. 113).

а)



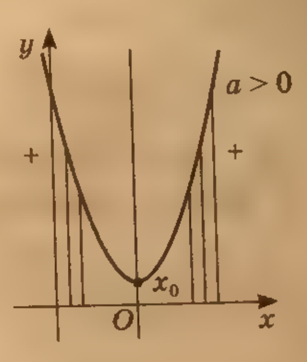
$f(x)\ge 0$
при $x\le x_1$ и $x\ge x_2$
$f(x)<0$ при $x_1<x<x_2$

б)



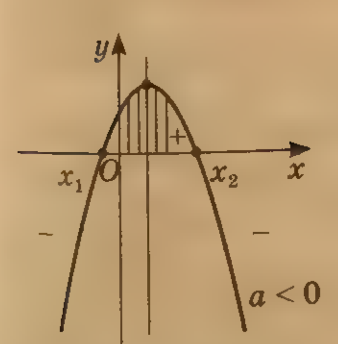
$f(x)\ge 0,\ x\in \mathbf{R}$
$f(x)<0$ —
нет решений

в)



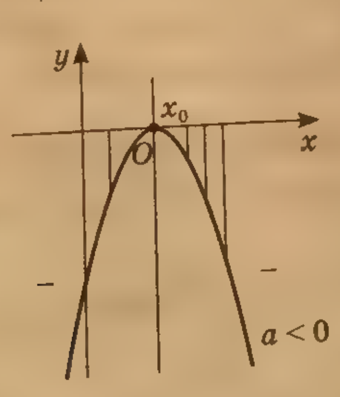
$f(x)>0,\ x\in \mathbf{R}$
$f(x)\le 0$ —
нет решений

г)



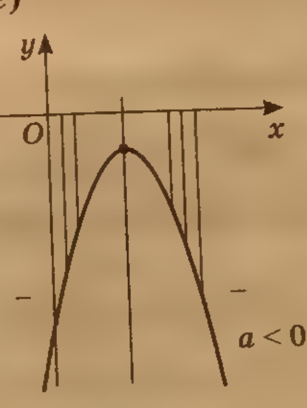
$f(x)\ge 0$ при $x_1\le x\le x_2$
$f(x)<0$
при $x<x_1$ и $x>x_2$

д)



$f(x)\le 0,\ x\in \mathbf{R}$
$f(x)>0$ —
нет решений

е)



$f(x)<0,\ x\in \mathbf{R}$
$f(x)\ge 0$ —
нет решений

Рис. 113



1. Решите неравенство $2x^2 - x - 3 \geq 0$, используя схему графика.

Решение.

1) $2x^2 - x - 3 = 0$

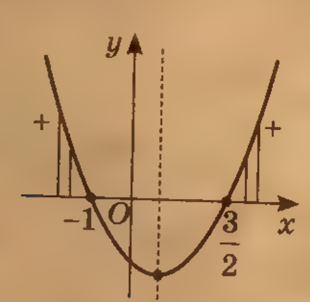
$x_1 = -1;\ x_2 = \frac{3}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$

2) $2 > 0$ — ветви параболы направлены вверх

3) Построим схему графика функции $y = 2x^2 - x - 3$



$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{array}\right.$

4) Изобразим на схеме решение неравенства.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{2x - x^2 - 3}$, используя график функции $y = 2x - x^2 - 3$.

Решение.

Решим неравенство $2x - x^2 - 3 \geq 0$

1) $2x - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$, корней нет

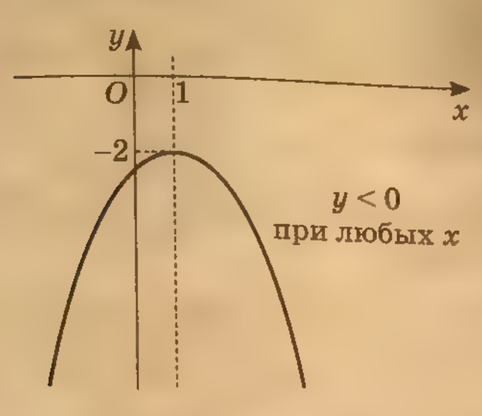
2) $a = -1$, $a < 0$, ветви направлены вниз

$y = \sqrt{f(x)}$ имеет смысл, если $f(x) \geq 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4 - 12 < 0$

3) График $y = -x^2 + 2x - 3$ весь под осью Ox



$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ нет решений

4) Изобразим на схеме решение неравенства.

Ответ: $D(y) = \varnothing$.

Проверь себя!

Решите неравенства (по графику).

1. $(x-3)^2 \le 49$

2. $-2x^2 + 3x > 0$

Ответ: 1. $[-4; 10]$. 2. $(0; 1{,}5)$.

§ 12 Показательные уравнения

Определение. Уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \ne 1$, $b > 0$ — постоянные, x — переменная, называется *показательным уравнением*.

Свойства показательных уравнений

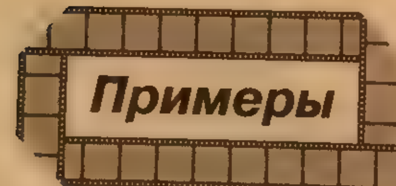
1. Если $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \ne 1$, $b > 0$, то существует единственное решение $f(x) = \log_a b$.
2. Если $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, $a > 0$, то $f(x) = \varphi(x)$.
3. Если $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a \ne b \ne 1$, $a > 0$, $b > 0$, то $f(x) = 0$.

Алгоритм 56 Решение показательного уравнения вида $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$

I тип: $a^{f(x)} = a^m \Leftrightarrow f(x) = m$ (свойство 2)

1. Приведите число b к степени с основанием a, т. е. к виду a^m (примените формулы $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$).
2. Решите уравнение $f(x) = m$.
3. Запишите ответ.

II тип: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ (свойство 1). К этому типу относятся уравнения, в которых число b нельзя записать в виде степени с основанием a с рациональным показателем.



1. ЭМ. Решите уравнение $128 \cdot 16^{2x+1} = 8^{3-2x}$.

Решение.

1) $2^7 \cdot 2^{8x+4} = 2^{9-6x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{7+8x+4} = 2^{9-6x}$ —
получим уравнение I типа
(применим свойство 2)

2) $7 + 8x + 4 = 9 - 6x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x + 6x = 9 - 11 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 14x = -2$
$x = -\dfrac{1}{7}$

ОДЗ: $x \in R$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a = 2;\ 128 = 2^7;$
$16^{2x+1} = (2^4)^{2x+1} = 2^{8x+4}$
$8^{3-2x} = (2^3)^{3-2x} = 2^{9-6x}$
$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)$
$a > 0,\ a \neq 1$ (свойство 2)

Ответ: $-\dfrac{1}{7}$.

2. Решите уравнение $2^x = 7$.

Решение.

$2^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_2 7$

| ОДЗ: $x \in R$
| $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Ответ: $\log_2 7$.

3. ЭМ. Даны функции $f(x) = 2^x$ и $q(x) = 5^{x+1}$. Решите уравнение $f(x) \cdot q(x) = 50$.

Решение.

1) $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^x = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10^x = 10$ (I тип)

2) $x = 1$

| ОДЗ: $x \in R$
| $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
| $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)$
| $a > 0,\ a \neq 1$ (свойство 2)

Ответ: 1.

4. ЭМ. Решите уравнение $\dfrac{2^{2x^2-6x}}{12^{3-x}} = \dfrac{12^{1-2x}}{3^{x^2-3x}}$.

Решение.

1) $2^{2x^2-6x} \cdot 3^{x^2-3x} = 12^{3-x} \cdot 12^{1-2x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x} \cdot 3^{x^2-3x} = 12^{4-3x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 12^{x^2-3x} = 12^{4-3x}$

2) $x^2 - 3x = 4 - 3x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

| ОДЗ: $x \in R$
| По свойству пропорции
| $a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$
| $2^{2x^2-6x} = 2^{2(x^2-3x)} = 4^{x^2-3x}$
| $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
| $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)$
| $a > 0,\ a \neq 1$ (свойство 2)

Ответ: –2; 2.

5. ЕГЭ. Решите уравнение $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$.

Решение.

1) $(2^5)^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot (5^4)^{x+2}=(2^3\cdot 3\cdot 5^2)^{x+7}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{5x+15}\cdot 3^{3x+1}\cdot 5^{4x+8}=2^{3x+21}\cdot 3^{x+7}\cdot 5^{2x+14}\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2^{5x+15}\cdot 3^{3x+1}\cdot 5^{4x+8}}{2^{3x+21}\cdot 3^{x+7}\cdot 5^{2x+14}}=1 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2x-6}\cdot 3^{2x-6}\cdot 5^{2x-6}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow (2\cdot 3\cdot 5)^{2x-6}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\ 30^{2x-6}=30^0$ (I тип)

2) $2x-6=0\Leftrightarrow x=3$

ОДЗ: $x\in R$

$32=2^5;\ 625=5^4$

$600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$

$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$

$a^m:a^n=a^{m-n}$

Обе части разделим на выражение, стоящее в правой части уравнения

$a^m\cdot b^m\cdot c^m=(abc)^m$

$1=30^0$

$a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}\Rightarrow f(x)=\varphi(x)$

$a>0,\ a\neq 1$ (свойство 2)

Ответ: 3.

Проверь себя!

1. $2^{7-5x}-\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x+1}=0$

2. $36\cdot 216^{3x+1}=1$

Ответ: 1. –10. 2. $-\dfrac{5}{9}$.

Алгоритм 57 Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)+k}+a^{f(x)+m}+a^{f(x)+n}=b$

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите уравнение к такому виду, чтобы все слагаемые в левой части уравнения имели одинаковое основание, а показатели степеней отличались на постоянное число.
3. Определите наименьший показатель, например $f(x)+n$, и вынесите за скобки степень с этим показателем (иначе разделите на него каждое слагаемое по формуле $a^{f(x)+m}:a^{f(x)+n}=a^{m-n}$).

4. Разделите обе части уравнения на полученное в скобках число.
5. Решите уравнение $a^{f(x)+n} = d$ (алгоритм 56).
6. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. $3^{2y-1} + 3^{2y-2} - 3^{2y-4} = 315$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) Все слагаемые в левой части уравнения степени с основанием 3

3) $3^{2y-4}(3^{-1+4} - 3^{-2+4} - 3^0) = 315 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2y-4}(3^3 + 3^2 - 1) = 315$

4) $3^{2y-4} \cdot 35 = 315 \quad \Big| : 35$

5) $3^{2y-4} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2y-4} = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y - 4 = 2 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

$2y - 4$ — наименьший показатель

$a^{cx+m} : a^{cx-n} = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$ $\quad_{a>0,\, a\neq 1}$

(по свойству монотонности)

Ответ: 3.

2. $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x(3^3 + 1) = 7^x(7 + 5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x \cdot 28 = 7^x \cdot 12 \quad \Big| : 7^x : 28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3^x}{7^x} = \frac{12}{28} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = 1$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$ $\quad_{a>0,\, a\neq 1}$

(по свойству монотонности)

$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Ответ: 1.

Проверь себя!

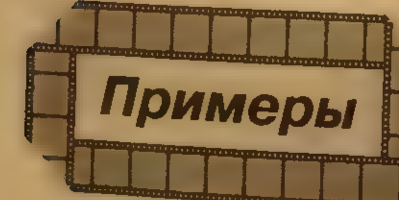
Решите уравнения.

1. ЭМ. $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x} = 5$
2. $10 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} = 7$
3. $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x}$

Ответ: 1. –2. 2. 0. 3. 1.

Алгоритм 58. Решение показательного уравнения, сводящегося к квадратному уравнению вида $ap^{2x} + bp^{x} + c = 0$

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите уравнение к виду $ap^{2x} + bp^{x} + c = 0$:
   если дано p^{2x+m} или p^{x+n}, то примените формулу $a^{m+n} = a^{m} \cdot a^{n}$;
   если дано p^{2x-m} или p^{x-k}, то умножьте обе части уравнения на p^{m} или p^{k};
   если дано p^{-x} или p^{-2x}, то умножьте обе части уравнения на p^{x} или p^{2x}.
3. Введите замену переменной $p^{x} = t$, $t > 0$. Получите уравнение вида $at^{2} + bt + c = 0$.
4. Найдите корни уравнения (п. 3); если $t_0 > 0$, то решите уравнение $p^{x} = t_0$; если $t < 0$, то исходное уравнение не имеет решения.
5. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. $4^{x} - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x : 2 - 24 = 0$

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$

3) Пусть $2^x = t,\ t > 0^{(*)}$,

тогда $t^2 - 5t - 24 = 0$

4) $\begin{cases} 2^x = t \\ t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

$a^{m-n} = a^m : a^n$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 \cdot t_2 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -3 \end{array} \right.$

$t = -3$ — не подходит $^{(*)}$

$a^m = a^n \underset{\substack{a>0 \\ a\neq 1}}{\Leftrightarrow} m = n$

(по свойству монотонности)

Ответ: 3.

2. ЭМ. $\frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} + 2^{3-x} = 3$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $\frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} + 2^{3-x} = 3 \,\big|\cdot 2^{x+2}$

$2^{2x} + 2^5 = 12 \cdot 2^x$

3) $2^x = t,\ t > 0$

$t^2 - 12t + 32 = 0$

$t_1 = 8 = 2^3,\ t_2 = 4 = 2^2$

4) $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2^3 \\ 2^x = 2^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array} \right.$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{x+2} = 2^{-1+x-1+x+2}$

$2^{3-x} \cdot 2^{x+2} = 2^{3-x+x+2} = 2^5$

$3 \cdot 2^{x+2} = 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 = 12 \cdot 2^x$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 12 \\ t_1 \cdot t_2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = 4 \end{array} \right.$

$a^m = a^n \underset{a>0,\ a\neq 1}{\Leftrightarrow} m = n$

Ответ: 2; 3.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $9^x - 5 \cdot 3^{x+1} + 54 = 0$

2. ЭМ. $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} = 4$

Ответ: 1. 2; $\log_3 6$. 2. –2.

Алгоритм 59 Решение показательного уравнения вида $sa^{2x}+pa^xb^x+qb^{2x}=0$

1. Найдите ОДЗ.
2. Упростите уравнение и приведите его к виду $sa^{2x}+pa^xb^x+qb^{2x}=0$ (I):
   если дано $a^{2x\pm m}$, то примените формулу $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$;
   если дано a^{m-n}, то умножьте на a^n обе части уравнения.
3. Разделите обе части уравнения (I) на $b^{2x}\neq 0$, получите уравнение
$$s\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+p\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+q=0$$
4. Введите замену переменной $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}=t$, $t>0$, и решите квадратное уравнение $st^2+pt+q=0$. Если корней нет или $t<0$, то исходное уравнение не имеет решений; если $t_0>0$, то решите уравнение
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{x}=t_0\Rightarrow x=\log_{\frac{a}{b}}t_0$$
5. Запишите ответ.

Пример

ЭМ. Решите уравнение $4^{x+1}-6^x-2\cdot 9^{x+1}=0$.

Решение.

1) ОДЗ: $x\in R$

2) $4\cdot 2^{2x}-2^x\cdot 3^x-2\cdot 9^x\cdot 9=0$

$4\cdot 2^{2x}-2^x\cdot 3^x-18\cdot 3^{2x}=0$

3) $4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-18=0$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$, $t>0^{(*)}$,

$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$

$9^{x+1}=9^x\cdot 9$; $4^{x+1}=(2^x)^2\cdot 4$

делим на $3^{2x}\neq 0$

$a^m:b^m=\left(\frac{a}{b}\right)^m$; $\frac{2^{2x}}{3^{2x}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $D=b^2-4ac$

тогда $4t^2-t-18=0$

$$\begin{cases} t=\dfrac{9}{4} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=t \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x=-2$$

$t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{289}}{8}=\dfrac{1\pm17}{8}$

$t_1=\dfrac{9}{4}$; $t_2=-2$ — посторонний по условию (*)

$a^m=a^n \underset{a>0,\ a\neq1}{\Leftrightarrow} m=n$

(по свойству монотонности)

Ответ: −2.

Полезный совет. Чтобы выбрать алгоритм решения, посмотрите:

1. Если левая или правая часть уравнения — положительный одночлен, то примените алгоритм 56, т. е. если $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$, $a>0$, $a\neq1$, то $f(x)=\varphi(x)$ по свойству монотонности, или если $a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$, $a\neq b\neq1$, $a>0$, $b>0$, то логарифмируйте обе части уравнения по удобному основанию.

2. Если левая или правая часть уравнения — многочлен, то решайте заменой переменной или разложением на множители.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $9^x+4^x=2{,}5\cdot6^x$

2. $8^x+18^x=2\cdot27^x$

Ответ: 1. $\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{3}{2}}2$. 2. 0.

Рассмотрим решение примера 2:

$8^x+18^x=2\cdot27^x$

$2^{3x}+2^x\cdot3^{2x}=2\cdot3^{3x} \quad \Big| : 3^{3x}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0$

$8^x=\left(2^3\right)^x$

$18^x=\left(2\cdot3^2\right)^x=2^x\cdot3^{2x}$

$27^x=\left(3^3\right)^x$; $a^m:b^m=\left(\frac{a}{b}\right)^m$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y,\ y > 0,\ y^3 + y - 2 = 0$

Разложим на множители:

$(y^3 - 1) + (y - 1) = 0$

$(y - 1)(y^2 + y + 1 + 1) = 0$

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$

$y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$
$y^2 + y + 2 = 0$
$D = 1 - 8 < 0$, значит, корней нет, поэтому
$y^2 + y + 2 \neq 0$
$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$ (по свойству монотонности)

Ответ: 0.

Алгоритм 60 Графическое решение показательного уравнения вида $a^x = f(x)$

1. Введите обозначения: $y = a^x$ и $y = f(x)$.
2. Постройте графики полученных функций в одной системе координат xOy.
3. Определите, есть ли точки пересечения графиков: если есть, то опустите из них перпендикуляры на ось Ox и прочитайте ответ; если общих точек нет, то решения нет.
4. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. ЭМ. $2^x = 6 - x$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$

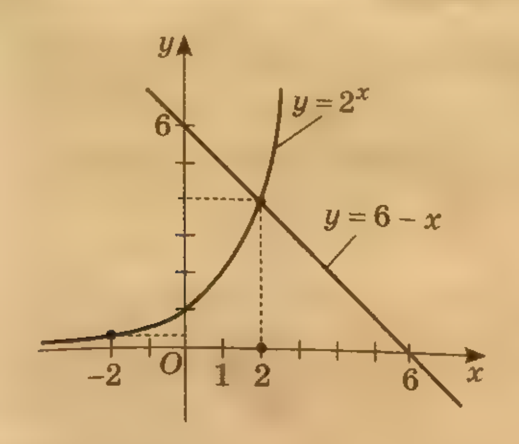


Рис. 114

Рис. 115

Решение.

1. 1) Пусть $y = 2^x$ и $y = 6 - x$.

2) Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = 6 - x$ (рис. 114).

$y = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$y = 6 - x$

x	0	2
y	6	4

3) Общая точка (2; 4)

Ответ: 2.

2. 1) Пусть $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = -\frac{3}{x}$.

2) Построим графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = -\frac{3}{x}$ (рис. 115).

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-1	0	1
y	3	1	$\frac{1}{3}$

$y = -\frac{3}{x}$

x	-3	-1	1	3
y	1	3	-3	-1

3) Общая точка (−1; 3)

Ответ: −1.

Алгоритм 61 Решение показательного уравнения с применением свойства монотонности функции

1. Найдите ОДЗ.
2. Определите монотонность (возрастание или убывание) функций, стоящих в левой и правой частях уравнения.
3. Определите, какая существует связь между характером монотонности этих функций: если функция, стоящая в одной части уравнения, строго убывает, а функция в другой части уравнения строго возрастает или постоянна (const), то уравнение имеет не более одного корня, который можно найти графически или подбором из ОДЗ, если корень — целое число. Если функции в каждой части уравнений только возрастают или только убывают, то утверждать однозначность решения нельзя.
4. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. ЭМ. $x^5+2x^3=48$ **2.** $2^x=3-x$

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x\in R$

2) Левая часть уравнения: $y=x^5$ — возрастает; $y=2x^3$ — возрастает; $y=x^5+2x^3$ — возрастает.

Правая часть уравнения: $y=48=\text{const}$

Значит, существует не более одного корня.

3) Пусть $x=2$, тогда $2^5+2\cdot 2^3=32+16=48$, получили правую часть, значит, $x=2$ — корень уравнения, других корней не может быть.

Ответ: 2.

2. 1) ОДЗ: $x\in R$

2) Левая часть уравнения: $y=2^x$ — возрастает $(2>1)$.

Правая часть уравнения: $y = 3 - x$ — убывает ($k = -1 < 0$).
Значит, существует не более одного корня.

3). Пусть $x = 1$, тогда $2^1 = 3 - 1 = 2$, $2 = 2$ — верно, значит, $x = 1$ — корень уравнения, и он единственный.

Ответ: 1.

Попробуй не реши!

Решите уравнения (1—2).

1. $9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}$

2. $2 \cdot 5^{x+2} - 10 \cdot 5^x = 8$

3. Укажите корень $x_0 > 0$ в уравнении $4^{5x} - 4^{2x-1} = 4^{3x+1} - 1$.

Ответ: **1.** 0. **2.** –1. **3.** $\frac{1}{2}$.

Попробуй-ка реши!

Решите уравнения.

1. $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0$

2. $3 \cdot 2^x - 2^{\frac{x}{2}+1} = 1$

3. $2^x = -\frac{1}{2} - x$ (используя монотонность функции)

Ответ: **1.** 0; 1. **2.** 0. **3.** –1.

§ 13 Решение показательных неравенств

Определение. Неравенства, в которых переменная содержится только в показателе степени, называются *показательными*.

Например: $2^x < 3$; $3^{2x} + 2 \cdot 6^x \le 0$; $5^{3x-2} - 5^{3x+1} > 5^{3x-4}$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0;\ 100^{2x} < 0{,}1$$

Решение показательных неравенств основано на свойстве монотонности показательной функции.

I. Если $a>1$, то $y=a^x$ *возрастает*, т. е. если $a^{f(x)} \geq a^{q(x)}$, то $f(x) \geq q(x)$ (если $a^{f(x)} < a^{q(x)}$, то $f(x) < q(x)$)

II. Если $0<a<1$, то $y=a^x$ *убывает*, т. е. если $a^{f(x)} \geq a^{q(x)}$, то $f(x) \leq q(x)$ (если $a^{f(x)} < a^{q(x)}$, то $f(x) > q(x)$)

Алгоритм 62 Решение показательных неравенств вида $a^x > b,\ a^x \geq b,\ a^x < b,\ a^x \leq b$

I случай: $b=a^n$. (Число b можно записать в виде степени a^n с рациональным показателем.)

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите обе части неравенства к одинаковому основанию a.
3. Сравните основание a с 1.
   Если $a>1$, то примените свойство I; если $0<a<1$, то примените свойство II и решите полученное неравенство.
4. Запишите ответ.



ЭМ. Решите неравенство $100^{2x+1} < 0{,}1$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $(10^2)^{2x+1} < 10^{-1} \Leftrightarrow 10^{4x+2} < 10^{-1}$

3) $4x+2<-1 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{4}$

$a=10>1$, значит, $y=10^x$ — возрастает и если $10^{f(x)} < 10^n$, то $f(x) < n$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{3}{4}\right)$.

II случай: число b нельзя записать в виде степени a^n с рациональным показателем, тогда запишите его через основное логарифмическое тождество $b = a^{\log_a b}$ и решите неравенство по I случаю.

Примеры

1. Решите неравенство $0{,}2^{x+1} \geq 7$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $0{,}2^{x+1} \geq 0{,}2^{\log_{0,2} 7}$

3) $x+1 \leq \log_{0,2} 7$

$x \leq \log_{0,2} 7 - 1$

$x \leq \log_{0,2} 35$

$b = a^{\log_a b}$

$0 < 0{,}2 < 1 \Rightarrow$

$y = (0{,}2)^x$ — убывает

и если $0{,}2^m \geq 0{,}2^n$, то $m \leq n$

$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$

$\log_{0,2} 7 - \log_{0,2} 0{,}2 =$

$= \log_{0,2} \frac{7}{0{,}2} = \log_{0,2} 35$

Ответ: $(-\infty; \log_{0,2} 35]$.

2. ЕГЭ. Решите неравенство $9^{x-7,2} \leq \frac{1}{81}$.

Ответ выбрать из решений:

1) $(-\infty; -5{,}2]$ 2) $(-\infty; -5{,}2)$

3) $(-\infty; 5{,}2]$ 4) $(-\infty; 3{,}2]$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $9^{x-7,2} \leq 9^{-2}$

3) $x - 7{,}2 \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -2 + 7{,}2 \Leftrightarrow x \leq 5{,}2$

$\frac{1}{81} = \frac{1}{9^2} = 9^{-2}$

$9 > 1$, значит, $y = 9^{f(x)}$ — возрастает и если $9^{f(x)} \leq 9^n$, то $f(x) \leq n$

Ответ: номер верного ответа: 3.

Проверь себя!

Решите неравенства.

1. $\frac{1}{8} < 2^{x-1} < 16$ 2. $3^{x^2} \le 81$ 3. $2^{2-x} > 3$

Ответ: **1.** $(-2; 5)$. **2.** $[-2; 2]$. **3.** $\left(-\infty; \log_2 \frac{4}{3}\right)$.

Алгоритм 63 Решение показательного неравенства приведением его к квадратному неравенству вида $ap^{2x} + bp^x + c \gtrless 0$

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите неравенство к виду $ap^{2x} + bp^x + c > 0$ или $ap^{2x} + bp^x + c < 0$ по формулам $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.
3. Введите замену переменной $p^x = t$, $t > 0$.
4. Решите неравенство $at^2 + bt + c \gtrless 0$ (по алгоритму 54).
5. Решите неравенство $p^x > t_2$, $p^x < t_1$ или $t_1 < p^x < t_2$ ($t_2 > t_1 > 0$ и t_1 и t_2 – корни уравнения $at^2 + bt + c = 0$).
6. Запишите ответ.



ЭМ. Решите неравенство $9^x - 2 \cdot 3^x < 3$.

<u>*Решение.*</u>

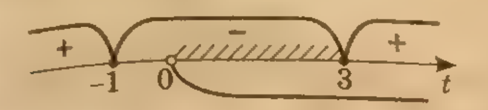
1) ОДЗ: $x \in R$

2) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 < 0$

3) Пусть $3^x = t$, $t > 0$

4) $t^2 - 2t - 3 < 0$ | $t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t - 3)(t + 1) < 0$



5) $0 < t < 3$

$0 < 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 \cdot t_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array} \right.$

$3 > 1$, значит, $y = 3^x$ — возрастает и если $3^m < 3^n$, то $m < n$

Проверь себя!

1. ЭМ. Решите неравенство $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0$.

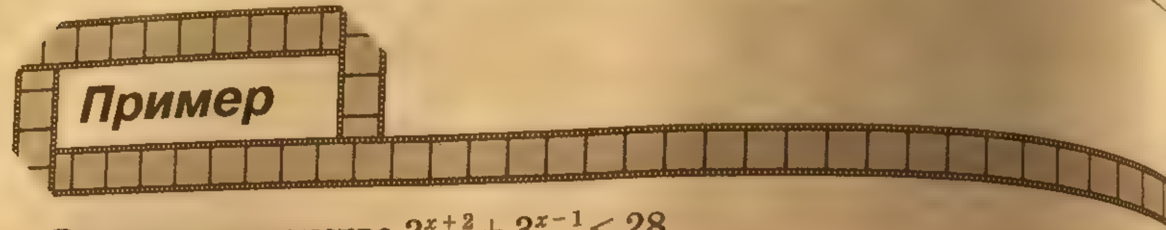
2. ЭМ. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $2^x + 2^{3-x} < 9$.

3. ЭМ. Решите неравенство $2^{1+x} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + 2 \geq 0$.

Ответ: 1. $(-\infty; -1)$. 2. 2. 3. $\left[\log_2 \frac{3}{4};\ +\infty\right)$.

Алгоритм 64 Решение показательного неравенства разложением на множители

1. Найдите ОДЗ.
2. Найдите член неравенства с наименьшим показателем и вынесите его за скобки.
3. Разделите на получившееся в скобках число обе части неравенства или сравните с нулем каждый множитель.
4. Решите простейшее неравенство $a^{f(x)} > b$ или $a^{f(x)} < b$ (по алгоритму 62).
5. Запишите ответ.



Решите неравенство $3^{x+2}+3^{x-1}<28$.

Решение.

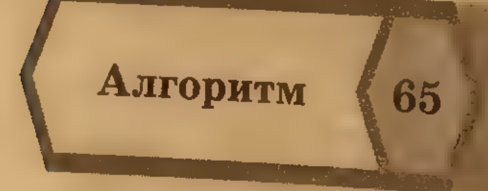
1) ОДЗ: $x \in R$
2) $3^{x-1}(3^3+1)<28$
$3^{x-1}\cdot 28<28 \mid :28$
3) $3^{x-1}<1$
4) $3^{x-1}<3^0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

3^{x-1} имеет меньший показатель
$3^{x+2}:3^{x-1}=3^{2+1}=3^3$
$3>1$, значит,
$y=3^x$ — возрастает и если $3^m<3^n$, то $m<n$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

Замечания

1. Этот способ применяется, если множитель при x одинаков, а число $\pm m$ разное.
2. Чтобы найти число в скобках, примените формулу
$$a^{cx+n}:a^{cx-m}=a^{n+m}$$
3. В пояснении за чертой в неравенстве $a^m \gtrless a^n$ пишите знак неравенства, данного в примере.



Решение дробно-показательного неравенства вида
$$a^{f(x)}+\frac{b}{a^{g(x)}}>c$$

1. Найдите ОДЗ (пересечение $D(f)$ и $D(g)$).
2. Умножьте обе части неравенства на $a^{g(x)}>0$.
3. Определите тип неравенства. Сравните показатели при одинаковом основании:

   1) если один показатель при x в 2 раза больше другого, то решайте по алгоритму 63;

2) если показатели отличаются на постоянную величину, то решайте по алгоритму 64.

4. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $3^{x+3}-\dfrac{2}{3^{x+2}}>1$ 2. ЭМ. $\dfrac{x-3}{4^x-1}\le 0$

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x\in R$

$3^{x+2}>0;\ 3^{x+3}=3\cdot 3^{x+2}$

2) $3\cdot 3^{x+2}-\dfrac{2}{3^{x+2}}>1 \quad \Big|\cdot 3^{x+2}$

3) $3\cdot(3^{x+2})^2-2-3^{x+2}>0$

4) Пусть $3^{x+2}=t;\ t>0$

5) $\begin{cases}3t^2-t-2>0\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow$

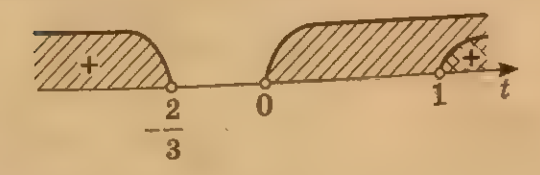
$3t^2-t-2=0$

$D=b^2-4ac=1+24=25$

$t_1=\dfrac{1+5}{6}=1$

$t_2=\dfrac{1-5}{6}=-\dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3(t-1)\left(t+\dfrac{2}{3}\right)>0\\ t>0\end{cases}$



$y=3^x$ — возрастает, если $3^m>3^n$, то $m>n$

$t>1\Leftrightarrow 3^{x+2}>1\Leftrightarrow 3^{x+2}>3^0\Leftrightarrow x+2>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>-2$

Ответ: $(-2;\ +\infty)$.

2. 1) ОДЗ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2) Решим две системы:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0\\4^x-1<0\end{cases}\\\begin{cases}x-3\le 0\\4^x-1>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\4^x<4^0\end{cases}\\\begin{cases}x\le 3\\4^x>4^0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\x<0\end{cases}\\\begin{cases}x\le 3\\x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0<x\le 3$

Дробь $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл, если $b\ne 0$

$4^x-1\ne 0 \Leftrightarrow 4^x\ne 4^0 \Leftrightarrow x\ne 0$

$$\frac{a}{b}\le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge 0\\b<0\end{cases}\\\begin{cases}a\le 0\\b>0\end{cases}\end{array}\right.$$

$y=4^x$ — возрастает и если $4^m<4^n$, то $m<n$

Ответ: (0; 3].

Попробуй-ка реши!

Решите неравенство $3^{4-3x}-\dfrac{35}{3^{2-3x}}+6\ge 0$.

Ответ: $\left(-\infty;\ 1-\dfrac{1}{3}\log_3 5\right]$.

Алгоритм 66 Решение неравенства вида $ap^{2x}+bp^xq^x+cq^{2x}\gtrless 0$

1. Найдите ОДЗ.
2. Разделите обе части неравенства на $q^{2x}>0$. Получите неравенство $a\left(\dfrac{p}{q}\right)^{2x}+b\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x}+c\gtrless 0$.
3. Введите замену $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x}=t,\ t>0$.
4. Решите неравенство $at^2+bt+c\gtrless 0$ с учетом $t>0$.
5. Решите неравенства $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x}>t_2$, $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x}<t_1$ или $t_1<\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x}<t_2$, если $t_2>t_1$.
6. Запишите ответ.



Решите неравенство $4^x - 3 \cdot 6^x \le 4 \cdot 9^x$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

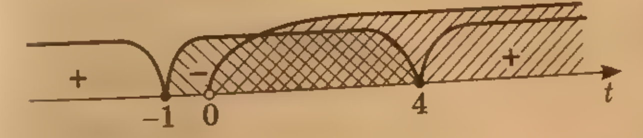
2) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} \le 0 \quad \Big| : 3^{2x}; \quad 3^{2x} > 0$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 \le 0$

4) Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t,\ t > 0$

5) $t^2 - 3t - 4 \le 0$

$\begin{cases} (t-4)(t+1) \le 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \le 4$



6) $0 < \left(\frac{2}{3}\right)^x \le 4 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \le \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x \ge \log_{\frac{2}{3}} 4$

Ответ: $\left[\log_{\frac{2}{3}} 4; +\infty\right)$.

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 \cdot t_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -1 \end{array}\right.$

$0 < \frac{2}{3} < 1$, значит,

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ — убывает и если

$\left(\frac{2}{3}\right)^m < \left(\frac{2}{3}\right)^n$, то $m > n$

$4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 4}$

Проверь себя!

Решите неравенство $7 \cdot 4^x - 9 \cdot 14^x + 2 \cdot 49^x \ge 0$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Алгоритм 67. Графическое решение показательного неравенства вида $a^x \gtrless f(x)$

1. Найдите ОДЗ.
2. Введите обозначения: $y = a^x$ и $y = f(x)$.
3. Определите монотонность функций, стоящих в левой и правой частях неравенства: если одна из функций убывает, а другая возрастает (или const), то имеется не более одного корня.
4. Постройте в одной системе xOy графики функций $y = a^x$ и $y = f(x)$.
5. Найдите абсциссу x_0 точки пересечения графиков (опустите перпендикуляр на ось Ox из их общей точки).
6. Проведите две прямые $l_1 \parallel Oy$ и $l_2 \parallel Oy$ слева и справа от точки x_0.
7. Сравните ординаты точек пересечения прямой с графиками и выберите тот промежуток, где выполняется заданное неравенство.
8. Запишите ответ.



Решите неравенство $(0,5)^x < x - 0,5$.

<u>Решение.</u>

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $y = (0,5)^x$ и $y = x - 0,5$

3) Функция $y = (0,5)^x$ убывает, основание $0 < 0,5 < 1$.
Функция $y = x - 0,5$ возрастает, $k = 1$, $1 > 0$, значит, существует одна точка пересечения графиков (подбором: $x = 1$).

4) Построим графики функций $y = (0,5)^x$ и $y = x - 0,5$ (рис. 116).

$y=(0,5)^x$

x	-1	0	1
y	2	1	$0,5$

$y = x - 0,5$

x	0	$0,5$
y	$-0,5$	0

5) Общая точка графиков: (1; 0,5).

6) Ордината графика функции $y = (0,5)^x$ меньше ординаты графика функции $y = x - 0,5$ справа от точки $x_0 = 1$.

Ответ: $x > 1$ или $(1; +\infty)$.

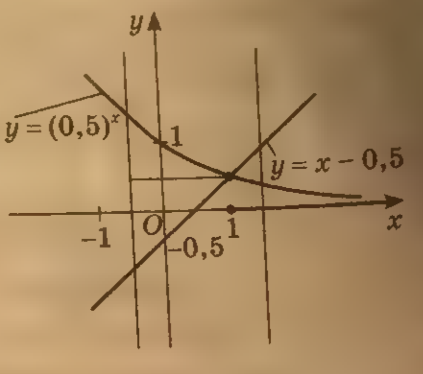


Рис. 116

§ 14 Решение логарифмических уравнений

Определение. Уравнение, в котором переменная содержится под знаком логарифма, называют *логарифмическим*.

Основные типы логарифмических уравнений

I. $\log_a f(x) = b$ или $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

II. $a\log^2_p f(x) + b\log_p f(x) + c = 0$

III. $\log_a f(x) \cdot \log_b g(x) = 0$

Условия равносильности логарифмических уравнений

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \underset{\substack{a>0\\a\neq1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0;\ g(x) > 0 \end{cases}$

2. $\log_a f(x) = \varphi(x) \underset{\substack{a>0\\a\neq1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) = a^{\varphi(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}$

3. $\log_a f^{2n}(x) = b \underset{a>0,\ a\neq1}{\Leftrightarrow} 2n \cdot \log_a |f(x)| = b$

Внимание!

Применяя формулы

$\log_a(f(x)\cdot\varphi(x))=\log_a f(x)+\log_a\varphi(x),$ (1)

$\log_a\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\log_a f(x)-\log_a\varphi(x),$ (2)

можно потерять корни, так как ОДЗ сужается.

А применяя формулы

$\log_a f(x)+\log_a\varphi(x)=\log_a(f(x)\cdot\varphi(x)),$ (3)

$\log_a f(x)-\log_a\varphi(x)=\log_a\frac{f(x)}{\varphi(x)},$ (4)

ОДЗ может быть расширена в результате преобразований и могут появиться посторонние корни, которые устанавливаются проверкой. Поэтому необходимо следить за ОДЗ, иначе равносильность логарифмических уравнений может быть нарушена.

Алгоритм 68 Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$

1. Найдите ОДЗ, решив систему неравенств $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ a>0;\ a\neq 1 \end{cases}$ и используя определение логарифма.

2. Преобразуйте выражения в левой и правой частях уравнения и приведите его к виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, применяя нужную из формул:

$$\log_a b+\log_a c=\log_a(bc),\ \log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}\ (a>0;\ c>0;\ a\neq 1)$$

или $n=\log_a a^n,\ \log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b,\ \log_a b=n\Leftrightarrow a^n=b$

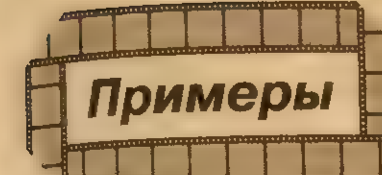
3. Решите уравнение $f(x)=g(x)$, используя свойство 1.

4. Запишите ответ.

Полезный совет. Если логарифмы имеют разные основания, то приведите их к одному основанию по формулам:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \ \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b = \log_a b^{-1}$$

$$(a > 0;\ c > 0;\ b > 0;\ a \neq 1;\ c \neq 1;\ b \neq 1)$$



1. Решите уравнение $\log_3(x-2) = 2$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in (2; +\infty)$

2) $\log_3(x-2) = \log_3 3^2$

3) $\begin{cases} x-2=9 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$

$\log_3 f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

$n = \log_a a^n$

$\begin{cases} \log_a f(x) = \log_a g(x) \\ f(x)>0;\ g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Ответ: 11.

2. ЕГЭ. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $4\log_3(x-5) = \log_3 16$.

1) $[-3; 3]$ 2) $[3; 6)$ 3) $[6; 8)$ 4) $[8; 12)$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in (5; +\infty)$

2) $4\log_3(x-5) = \log_3 16$

$4\log_3(x-5) = 4\log_3 2$

3) $\begin{cases} \log_3(x-5) = \log_3 2 \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\log_3 f(x)$ имеет смысл, если

$f(x) > 0 \Rightarrow x-5>0 \Leftrightarrow x>5$

$\log_3 16 = \log_3 2^4 = 4\log_3 2$

$\log_a b^n = n\log_a b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=2 \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow x=7$$

Ответ: номер верного ответа: 3.

3. ЭМ. Решите уравнение $\log_{(x-6)^2}(x^2-5x+9)=\frac{1}{2}$.

Решение.

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-5x+9>0 \\ (x-6)^2>0 \\ (x-6)^2\neq 1 \end{cases}$$

$\log_a b$ существует, если $b>0$; $a>0$; $a\neq 1$

$x^2-5x+9=0$

$D=b^2-4ac=25-36<0\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-5x+9>0$ при $x\in R$

$|x-6|=1\Rightarrow x=7;\quad x=5$

$x\neq 5,\ x\neq 6,\ x\neq 7$

ОДЗ: $x\in(-\infty;\ 5)\cup(5;\ 6)\cup$
$\cup(6;\ 7)\cup(7;\ +\infty)$

2) $\left((x-6)^2\right)^{\frac{1}{2}}=x^2-5x+9$

По определению логарифма

$\log_a b=n\Leftrightarrow a^n=b;\ a>0;\ b>0;\ a\neq 1$

$|x-6|=x^2-5x+9$

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geq 0 \\ -a, \text{ если } a<0 \end{cases}$$

3) $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>6 \\ x^2-5x+9-(x-6)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<6 \\ x^2-5x+9-(6-x)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>6 \\ x^2-6x+15=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<6 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x<6 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}\right. \Leftrightarrow$$

$x^2-6x+15=0$

$D=b^2-4ac=36-60<0$

Нет корней при $x\in R$

$$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1\cdot x_2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

$x=1$ и $y=3$ входят в ОДЗ

Ответ: 1; 3.

З а м е ч а н и е. Можно было бы проверкой установить, какой корень является решением, не находя ОДЗ и не применяя условие равносильности, но такое решение является более формальным, не содержащим мотивации действий.

Например, решить приведенное уравнение можно было так:

$$\sqrt{(x-6)^2} = x^2 - 15x + 9 \qquad \Big|\ \sqrt{a^2} = |a|$$

$$|x-6| = x^2 - 5x + 9$$

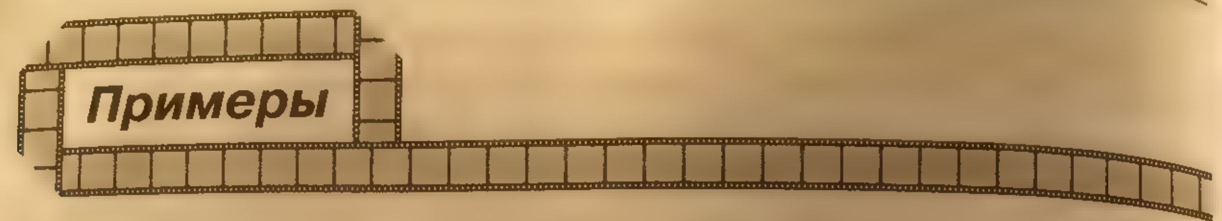
Найдя корни 1 и 3, проверим их:

$$\log_{(1-6)^2}(1^2 - 5 \cdot 1 + 9) = \log_{25}5 = 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5 = 0{,}5 \text{ — истина}$$

$$\log_{(3-6)^2}(9 - 15 + 9) = \log_{9}3 = 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5 = 0{,}5 \text{ — истина}$$

Алгоритм 69. Решение уравнения вида $a\log_p^2 f(x) + b\log_p f(x) + c = 0$ $(a \neq 0,\ f(x) > 0,\ p > 0,\ p \neq 1)$

1. Найдите ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ p > 0 \\ p \neq 1 \end{cases}$ (по определению логарифма)
2. Введите новую переменную $t = \log_p f(x)$, t — любое действительное число.
3. Решите квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$; если есть корни, то выполните п. 4.
4. Решите уравнения $\log_p f(x) = t_1$ и $\log_p f(x) = t_2$.
5. Согласуйте решения с ОДЗ.
6. Запишите ответ.



1. ЭМ. Даны функции $f(x)=\log_2^2 x$ и $g(x)=3\log_8 x$. Решите уравнение $f(x)-3g(x)=4$.

Решение.

1) ОДЗ: $x>0$

$\log_2 x$ существует при $x>0$

Вместо $f(x)$ и $g(x)$ подставим их выражения:

$\log_2^2 x-3\cdot 3\log_8 x=4$

$\log_2^2 x-3\log_2 x-4=0$

$3\log_8 x=3\cdot\frac{1}{3}\log_2 x=\log_2 x$

$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b$

2) Пусть $\log_2 x=t$, $t\in R$

3) $t^2-3t-4=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=3 \\ t_1\cdot t_2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} t=4 \\ t=\log_2 x \end{cases}$ или $\begin{cases} t=-1 \\ t=\log_2 x \end{cases}$

4) $\left[\begin{array}{l} \log_2 x=4 \\ \log_2 x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=16 \\ x=2^{-1}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

5) Согласуем корни с ОДЗ: $16>0$; $\frac{1}{2}>0$

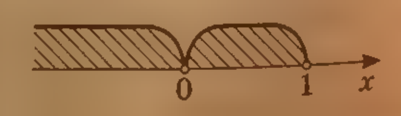
Ответ: $\frac{1}{2}$; 16.

2. Решите уравнение $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$.

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases} 3-x>0 \\ 1-x>0 \\ 3-x\neq 1 \\ 1-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\log_a b$ имеет смысл, если $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$



$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x<1 \\ x\neq 2 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$x\in(-\infty;\, 0)\cup(0;\, 1)$

2) Пусть $\log_{1-x}(3-x)=t$,

тогда $\log_{3-x}(1-x)=\dfrac{1}{t}$

$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

$\log_{3-x}(1-x)=\dfrac{1}{\log_{1-x}(3-x)}$

3) $t=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} \log_{1-x}(3-x)=1 \\ \log_{1-x}(3-x)=-1 \end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$

$\log_a b=n\Leftrightarrow a^n=b$

$a>0,\, b>0,\, a\neq 1$

$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1-x=3-x \\ (1-x)^{-1}=3-x \end{array}\right. \\ x<1;\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1=3\ (\text{ложно}) \\ \dfrac{1}{1-x}=3-x \end{array}\right. \\ x<1;\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$ax^2+2mx+c=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} (3-x)(1-x)=1 \\ x<1;\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x-3x+x^2-1=0 \\ x<1;\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x_1=2+\sqrt{2}$

$x_2=2-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-4x+2=0 \\ x<1;\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x<1;\ x\neq 0 \end{cases}$

5) Согласуем x_1 и x_2 с ОДЗ: $x_1\approx 3{,}4>1$ — не входит в ОДЗ; $x_2\approx 0{,}6\in(0;\,1)\Rightarrow x_2=2-\sqrt{2}$ — корень уравнения

Ответ: $2-\sqrt{2}$.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $(\log_3 x)^2+5=2\log_3 x^3$

2. $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$

3. $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$

Ответ: 1. 3; 243. 2. 9; 27. 3. $\frac{1}{4}$; 2.

Алгоритм 70 Решение логарифмического уравнения способом разложения на множители

1. Найдите ОДЗ.
2. Перенесите в одну часть уравнения все его члены.
3. Разложите выражение в левой части на множители (вынесите общий множитель за скобки).
4. Приравняйте нулю каждый множитель и решите полученные уравнения, используя условие $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$
5. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. $\log_{\sqrt{3}}(x-2) \cdot \log_5 x = 2\log_3(x-2)$

<u>*Решение.*</u>

1) ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

$x \in (2; +\infty)$

2) $2\log_3(x-2) \cdot \log_5 x - 2\log_3(x-2) = 0$

$\log_3 f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$

3) $2\log_3(x-2)\cdot(\log_5 x-1)=0$

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ \text{ОДЗ}\end{cases}$$

4) $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3(x-2)=0\\ \log_5 x-1=0\end{array}\right.\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-2=3^0\\ \log_5 x=1\end{array}\right.\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5\end{array}\right.\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5\end{array}\right.$

Ответ: 3; 5.

Внимание! Делить на множитель с переменной **НЕЛЬЗЯ!** Можно потерять корни.

2. ЭМ. $(x^2-7x+10)\cdot(\log_{\frac{x}{2}} 8x+1)=0$

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases}\dfrac{x}{2}>0\\ \dfrac{x}{2}\neq 1\\ 8x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\neq 2\end{cases}$

$\log_a b$ имеет смысл, если $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$



$x\in(0;\,2)\cup(2;\,+\infty)$

2) $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-7x+10=0\\ \log_{\frac{x}{2}} 8x+1=0\end{array}\right.\\ x>0;\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=2\\ \log_{\frac{x}{2}} 8x=-1\end{array}\right.\\ x>0;\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-1}=8x\end{array}\right.\\ x>0;\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\ \dfrac{2}{x}=8x\end{array}\right.\\ x>0;\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow$

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ \text{ОДЗ}\end{cases}$$

$x^2-7x+10=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=7\\ x_1\cdot x_2=10\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.$

$\log_a b=n \Leftrightarrow a^n=b$

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x^2=\frac{1}{4} \end{array}\right. \\ x>0;\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ x>0;\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$; 5.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $\log_7(x-1)\cdot\log_7 x=\log_7 x$ **2.** $2\log_7(x-2)=-2+\log_7(x-10)^2$

Ответ: **1.** 8. **2.** 3.

Алгоритм 71 Графическое решение логарифмического уравнения

Пусть дано уравнение $\log_a f(x)=g(x)$.

1. Введите обозначения: $y=\log_a f(x)$ (I) и $y=g(x)$ (II).
2. Найдите ОДЗ.
3. Определите монотонность каждой функции; если функция I возрастает, а функция II убывает либо постоянна (const) или наоборот, то существует не более одного корня.
4. Постройте оба графика в одной системе координат xOy.
5. Выясните, есть ли точка пересечения графиков: если есть, то опустите из нее перпендикуляр на ось Ox и прочтите ответ на оси Ox: x_0; если общих точек нет, то и решений нет. Если п. 3 не выполняется, то корней может быть несколько или ни одного.
6. Запишите ответ.



Решите графически уравнения.

1. $\log_2(x-1)=1-x$ 2. $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=x^3$

Решение.

1. 1) Введем обозначения: $y=\log_2(x-1)$ (I) и $y=1-x$ (II)

2) ОДЗ: $x>1$

3) Функция I возрастает, функция II убывает. Значит, уравнение имеет не более одного корня.

$\log_2 f(x)$ имеет смысл при $f(x)>0$

$y=\log_2(x-1)$ возрастает $(a=2>1)$

$y=1-x$ убывает $(k=-1<0)$

4) Построим графики функций I и II на ОДЗ: $x>1$ в одной системе координат xOy (рис. 117).

$y=\log_2(x-1)$; $x>1$

x	1,5	5	9
y	−1	2	3

$y=1-x$

x	0	1
y	1	0

5) Обнаружим общую точку графиков и опустим из нее перпендикуляр на ось Ox: $x_0\approx1{,}7$.

Ответ: $\approx 1{,}7$.

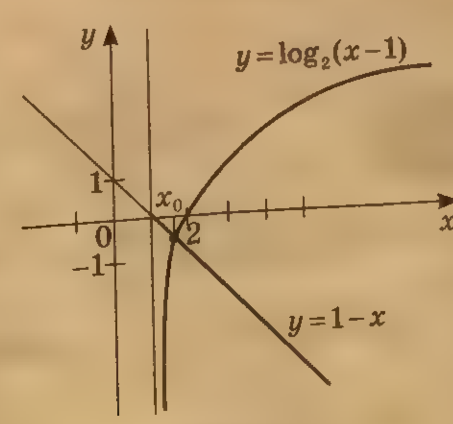


Рис. 117

2. 1) Рассмотрим функции $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ (I) и $y=x^3$ (II)

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)$ имеет смысл при $f(x)>0$

$x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$

2) ОДЗ: $x\in(-2;+\infty)$

$y=x^3$; $x\in \mathbf{R}$

3) Функция I убывает, функция II возрастает. Значит, уравнение имеет не более одного корня.

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ убывает $\left(0<\frac{1}{2}<1\right)$

$y=x^3$ возрастает

4) Построим графики функций I и II на ОДЗ: $x>-2$ в одной системе координат (рис. 118).

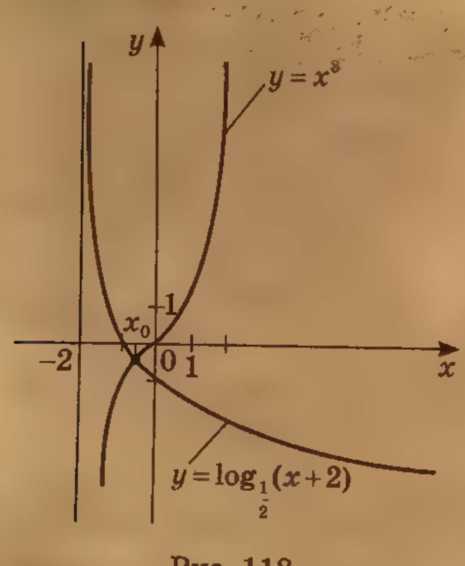


Рис. 118

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$; $x>-2$ (I)

x	−1,5	−1	0	2	6
y	1	0	−1	−2	−3

$y=x^3$ (II)

x	−1	0	1	2
y	−1	0	1	8

5) Обнаружим общую точку графиков и опустим из нее перпендикуляр на ось Ox: $x_0\approx-0,7$.

Ответ: $\approx -0,7$.

Попробуй не реши!

Решите графически уравнения.

1. $y=\log_2(x-2)=\frac{1}{x}$

2. $y=\log_{\frac{1}{8}}(x-1)=x^{\frac{1}{2}}$

Ответ: 1. $\approx 3,2$. 2. $\approx 1,3$.

Решение показательно-логарифмических уравнений

Общего алгоритма решения для примеров смешанного типа не существует, поэтому будем сводить решение этих уравнений с помощью постепенных упрощений (соблюдая равносильность) к одному из стандартных типов решения, разобранных ранее.



Решите уравнения.

1. $25^{\log_3 x} - 4 \cdot 5^{\log_3 x + 1} = 125$

2. ЭМ. $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

Решение.

1. ОДЗ: $x > 0$ — $\log_3 x$ имеет смысл при $x > 0$

$(5^2)^{\log_3 x} - 4 \cdot 5^{\log_3 x} \cdot 5 - 125 = 0$

Внимание! В записи $5^{\log_3 x + 1}$ единица не относится к логарифму

$(5^{\log_3 x})^2 - 20 \cdot 5^{\log_3 x} - 125 = 0$ — $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Пусть $5^{\log_3 x} = t$, $t > 0^*$, тогда $t^2 - 20t - 125 = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 20 \\ t_1 \cdot t_2 = -125 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 25 \\ t = -5 \end{array}\right.$

$t_1 = 25$, $t_2 = -5 < 0$ — не подходит (*)

$a^r > 0$ при любых значениях r

$\begin{cases} t = 5^{\log_3 x} \\ t = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\log_3 x} = 5^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ — $5^m = 5^n \Rightarrow m = n$ по свойству степеней

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^2 = 9 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ — $\log_a b = n \Rightarrow a^n = b$

$\Leftrightarrow x = 9$

Ответ: 9.

2. ОДЗ: $x \in (\log_3 8; +\infty)$

$y = \log_3 f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$

$3^x - 8 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > \log_3 8$

$\log_3(3x - 8) = 2 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{2-x} = 3^x - 8 \mid \cdot 3^x \Rightarrow 3^2 =$

$= 3^{2x} - 8 \cdot 3^x = 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$

$a > 0, a \neq 1, b > 0$

Пусть $3^x = t,\ t > 0^*$,
тогда получим уравнение

$t^2 - 8t - 9 = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 8 \\ t_1 \cdot t_2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -1 \end{array}\right.$

не удовлетворяет (*)

$\begin{cases} t = 3^x \\ t = 9 \end{cases} \Rightarrow$

$a^m = a^n \Rightarrow m = n$
(свойство степеней)

$\Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

$\log_3 9 > \log_3 8$

$2 \in (\log_3 8; +\infty)$

Ответ: 2.

Попробуй не реши!

Решите уравнения.

1. ЭМ. $\lg(4x - 2) = 5\lg 2 - 3$

2. ЭМ. $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{3x+2}{2x-7} = -1$

Ответ: 1. 0,508. 2. 6.

Попробуй-ка реши!

Решите уравнения.

1. ЭМ. $\log_{x+1}(x^2 + 6x - 6)^2 = 4$
2. ЭМ. $(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0$
3. ЭМ. $|\log_2 x - 1| = (4 - 8x)(\log_2 x - 1)$

Ответ: 1. $\frac{7}{4}$. 2. $\frac{1}{6}$; 2. 3. $\frac{5}{8}$; 2.

Решение логарифмических уравнений, предложенных на экзаменах (ЭМ, ЕГЭ)

1. **ЭМ.** Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)-\log_{\frac{1}{2}}16=5$.

Решение.

1) ОДЗ: $x\in\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$

2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=\log_{\frac{1}{2}}16+5$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=5-4$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=1$

$$\begin{cases}2x-1=\left(\frac{1}{2}\right)^1\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\ x=\frac{3}{4}$$

$y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$ имеет смысл, если

$f(x)>0$

$2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}}16=-4$

$\log_a b=n\Rightarrow a^n=b$

$a>0,\ a\neq1,\ b>0$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

2. Решите уравнение $\log_5(5^x-4)=1-x$.

Решение.

Используем свойство монотонности функций в левой и правой частях уравнения.

1) ОДЗ: $x\in(\log_5 4;\ +\infty)$

2) Функция $\varphi(x)=\log_5(5^x-4)$ возрастает. Функция $g(x)=1-x$ — убывает. Значит, уравнение $\varphi(x)=g(x)$ имеет не более одного корня на ОДЗ.

3) Испытаем целые числа на ОДЗ ($x>\log_5 4$) 1; 2; 3; ...:

$y=\log_5 f(x)$ имеет смысл, если $f(x)>0$

$5^x-4>0\Leftrightarrow5^x>4\Leftrightarrow x>\log_5 4$

$y=\log_5 f(x)$ возрастает, если $a>1$ ($a=5>1$)

$y=kx+b$ убывает, если $k<0$ ($k=-1<0$)

$$\text{пусть } x_0 = 1 \Rightarrow \log_5(5^1 - 4) = 1 - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_5 1 = 0 \text{ — истина}$$
$$\text{Значит, } x_0 = 1 \text{ — корень, и он единственный}$$

Ответ: 1.

З а м е ч а н и е. Можно решить уравнение по алгоритму 68.

3. ЕГЭ. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $2 - \log_4(x+3) = \log_4(x+3)$:

1) (6; 4) 2) (−4; −3) 3) (−3; 4) 4) (4; 6)

Решение.

1) ОДЗ: $x \in (-3; +\infty)$

2) $2 = \log_4(x+3) + \log_4(x+3)$

$2 = 2\log_4(x+3)$

$\log_4(x+3) = 1 \Leftrightarrow x+3 = 4^1 \Leftrightarrow x = 1$

3) $1 \in (-3; +\infty) \Rightarrow 1 \in (-3; 4)$

$y = \log_4 f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$

$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$\log_a b = n \Rightarrow a^n = b$

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

Ответ: номер верного ответа: 3.

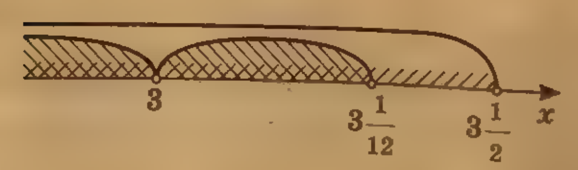
4. ЕГЭ. Решите уравнение $\log_9(37-12x) \cdot \log_{7-2x} 3 = 1$.

Решение.

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} 37 - 12x > 0 \\ 7 - 2x > 0 \\ 7 - 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{37}{12} \\ x < 3{,}5 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3\dfrac{1}{12} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$\log_a b$ имеет смысл, если $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$



$x \in (-\infty; 3) \cup \left(3; 3\frac{1}{12}\right)$

2) $\frac{1}{2}\log_3(37-12x)\cdot\log_{7-2x}3=$

$=1\,\big|:\log_{7-2x}3\,\big|\cdot 2$

$\log_3(37-12x)=\dfrac{2}{\log_{7-2x}3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_3(37-12x)=2\log_3(7-2x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_3(37-12x)=\log_3(7-2x)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 37-12x=(7-2x)^2\Leftrightarrow 37-12x=$

$=49-28x+4x^2\Leftrightarrow 4x^2-16x+12=$

$=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$

3) $3\notin(-\infty;\,3)$; $1\in(-\infty;\,3)$

$\log_{a^n}b=\dfrac{1}{n}\log_a b$

$\dfrac{1}{\log_a b}=\log_b a$

$\dfrac{1}{\log_{7-2x}3}=\log_3(7-2x)$

$n\log_a b=\log_a b^n$

$\log_3 f(x)=\log_3 g(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)>0$

(по свойству монотонности)

По формулам Виета

$\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=4\\x_1\cdot x_2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$

Ответ: 1.

З а м е ч а н и е. Если нахождение ОДЗ трудоемко, то можно не находить ОДЗ, а решить уравнение, затем отобрать корни проверкой, подставляя найденные значения x в заданное уравнение.

§ 15 Решение логарифмических неравенств вида $\log_a f(x) \gtrless m$ (I) и $\log_a f(x) \gtrless \log_a g(x)$ (II)

Решение логарифмических неравенств в основном приводится к решению I и II видов неравенств.

При решении I и II видов неравенств используются свойства монотонности и ОДЗ функции $y=\log_a f(x)$. Напомним, что:

1) функция $y=\log_a f(x)$ определена при условии $f(x)>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Монотонность функции $y=\log_a f(x)$ зависит от значения a: $a>1$ или $0<a<1$;

2) если $a>1$, то функция $y=\log_a f(x)$ возрастает на ОДЗ — это значит, что большему логарифму соответствует большее значение логарифмируемого выражения, т. е. если $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, то $f(x)>g(x)$, или если $\log_a f(x)<\log_a g(x)$, то $f(x)<g(x)$ (при освобождении от знака логарифма знак неравенства сохраняется);

3) если $0<a<1$, то функция $y=\log_a f(x)$ убывает на ОДЗ — это значит, что большему логарифму соответствует меньшее значение логарифмируемого выражения, т. е. если $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, то $f(x)<g(x)$ (при освобождении от знака логарифма знак неравенства меняется на противоположный: > на < или < на >).

Замечания

1. $m=\log_a a^m$; $a>0$, $a\neq 1$.
2. Решать неравенства можно, используя условия равносильности.

Условия равносильности логарифмических неравенств $\log_a f(x) \gtrless m$ и $\log_a f(x) \gtrless \log_a g(x)$

1. $\log_a f(x)\geq \log_a a^m \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ f(x)\geq a^m \end{cases}$

2. $\log_a f(x)<\log_a a^m \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ f(x)<a^m \\ f(x)>0 \end{cases}$

3. $\log_a f(x)\geq \log_a a^m \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)\leq a^m \\ f(x)>0 \end{cases}$

4. $\log_a f(x)<\log_a a^m \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)>a^m \end{cases}$

5. $\log_a f(x)\geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ f(x)\geq g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$

6. $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$

7. $\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

8. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Алгоритм 72. Решение логарифмического неравенства вида $\log_a f(x) \gtrless m$

1. Запишите $m = \log_a a^m$, получите неравенство $\log_a f(x) \gtrless \log_a a^m$.
2. Запишите условие равносильности при $a > 1$ или $0 < a < 1$ за чертой.
3. Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x) > a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$, или $\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$, или $f(x) > a^m$.
4. Запишите ответ.



1. **ЕГЭ.** Решите неравенство $\log_{\frac{10}{3}}(1-1{,}4x) < -1$. Выбрать промежуток из предложенных: 1) $(1{,}4;\ 2)$; 2) $(-\infty;\ 0{,}5)$; 3) $\left(0{,}5;\ \frac{5}{7}\right)$; 4). $(0{,}5;\ +\infty)$.

Решение.

1) $-1 = \log_{\frac{10}{3}}\left(\frac{10}{3}\right)^{-1} = \log_{\frac{10}{3}} 0{,}3$

2) $\log_{\frac{10}{3}}(1-1{,}4x) < \log_{\frac{10}{3}} 0{,}3$

3) $\begin{cases} 1-1{,}4x < 0{,}3 \\ 1-1{,}4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}4x > 0{,}7 \\ 1{,}4x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$n = \log_a a^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

$a = \frac{10}{3}$; $a > 1$, значит, $y = \log_a f(x)$ возрастает,

и если $\log_a f(x) < \log_a a^m$,

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0{,}5 \\ x < \frac{5}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}$

то $\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Ответ: номер верного ответа: 3.

2. ЭМ. Решите неравенство $\log_{0,25}(3x-5) > -3$.

Решение.

1) $-3 = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{4}} 64$

2) $\log_{\frac{1}{4}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{4}} 64$

3) $\begin{cases} 3x-5 < 64 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 69 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 23 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < 23$

$n = \log_a a^n$; $\left(\frac{1}{b}\right)^{-n} = b^n$

$a = 0{,}25 = \frac{1}{4}$; $0 < a < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \log_{\frac{1}{4}} f(x)$ убывает и

$\log_a f(x) > \log_a a^m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{5}{3};\ 23\right)$.

3. ЭМ. Решите неравенство $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} \geq 0$.

Решение.

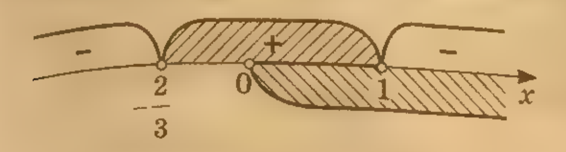
1) ОДЗ: $\begin{cases} \frac{3x+2}{4(1-x)} > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} < x < 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$\log_a b$ имеет смысл, если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

Решите неравенство методом интервалов:

$\left(-\frac{2}{3};\ 1\right)$

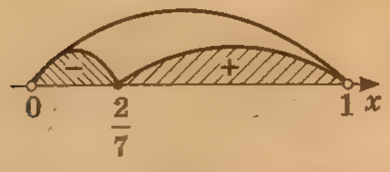


$x \in (0; 1)$

2) $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} \geq \log_x 1$

$\begin{cases} \frac{3x+2}{4(1-x)} \leq 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+2}{4(1-x)} - 1 \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x-2}{4(1-x)} \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$



3) $x > 1$ не входит в ОДЗ

Ответ: $\left(0; \frac{2}{7}\right]$.

$0 = \log_a 1$

$0 < a < 1 \Rightarrow y = \log_a f(x)$ убывает и

$\log_a f(x) > \log_a a^m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Примените метод интервалов:

$x = \frac{2}{7}$; $x \neq 1$



Проверь себя!

Решите неравенства (1—2).

1. $\log_3(2x-1) < 3$ 2. $\log_2(1-2x) > 0$

3. Укажите все целые решения неравенства $\log_4(x^2+2x-8) < 2$.

Ответ: 1. $\left(\frac{1}{2}; 14\right)$. 2. $(-\infty; 0)$. 3. -5; 3.

Алгоритм 73 Решение неравенств вида $\log_a f(x) \gtrless \log_a \varphi(x)$

1. Приведите логарифмы к одному основанию (если основания логарифмов разные) по формулам:

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad n = \log_a a^n$$

2. Приведите неравенство к виду $\log_a f(x) \gtrless \log_a \varphi(x)$.

3. **Если $a > 1$,** то решите систему I или II:

I. $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

II. $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то решите систему III или IV:

III. $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

IV. $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

4. Изобразите решение системы на числовой оси.

5. Запишите ответ.



ЭМ. Дана функция $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + x - 3)$. Найдите область определения функции

$$g(x) = \sqrt{\underbrace{f(x) - \log_{\frac{1}{3}}(3x+9)}_{\varphi(x)}}$$

<u>*Решение.*</u>

1) $\sqrt{\varphi(x)}$ существует, если $\varphi(x) \geq 0$. Выпишем подкоренное выражение и решим неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + x - 3) - \log_{\frac{1}{3}}(3x+9) \geq 0$$

2) $\log_{\frac{1}{3}}\underbrace{(2x^2+x-3)}_{f(x)} \ge \log_{\frac{1}{3}}\underbrace{(3x+9)}_{t(x)}$

$a=\frac{1}{3};\ 0<\frac{1}{3}<1$

3) Решим систему неравенств:

$y=\log_{\frac{1}{3}} f(x)$ убывает и

$\log_{\frac{1}{3}} f(x) \ge \log_{\frac{1}{3}} t(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le t(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2+x-3\le 3x+9 \\ 2x^2+x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x-12\le 0 \quad \Big|:2 \\ 2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6\le 0 \\ (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2)\le 0 \ (I) \\ (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)>0 \ (II) \end{cases}$$

$2x^2+x-3=0$

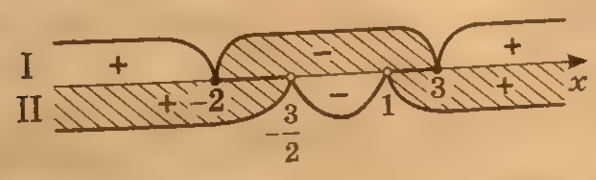
$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm 5}{4}$

$x_1=1; \quad x_2=-\frac{3}{2}$

$x^2-x-6=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1\cdot x_2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$

4) Решим методом интервалов систему неравенств:



$-2\le x<-\frac{3}{2};\ 1<x\le 3$

Ответ: $\left[-2;\ -\frac{3}{2}\right)\cup(1;\ 3]$.

Алгоритм 74 Решение логарифмического неравенства, приводимого к квадратному неравенству

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите логарифмы к одному основанию по формулам:

$$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b; \quad \log_a b=\frac{1}{\log_b a} \text{ и т. д.}$$

3. Приведите неравенство к виду

$$a\log_p^2 f(x)+b\log_p f(x)+c \gtrless 0$$

4. Введите замену $\log_p f(x)=t$ и решите квадратное неравенство

$$at^2+bt+c \gtrless 0, \text{ т. е. } a(t-t_1)(t-t_2) \gtrless 0\ (t_1<t_2)$$

5. Решите системы неравенств

$$\begin{cases}\log_p f(x)>t_2\\ f(x)>0\end{cases} \quad \begin{cases}\log_p f(x)<t_1\\ f(x)>0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}t_1<\log_p f(x)<t_2\ (t_1<t_2)\\ f(x)>0\end{cases}$$

6. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $\dfrac{1}{\lg x}+\dfrac{1}{1-\lg x}>1$

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases}\lg x\neq 0\\ 1-\lg x\neq 0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq 10\\ x>0\end{cases}$

$x\in(0;\,1)\cup(1;\,10)\cup(10;\,+\infty)$

2) В условии даны логарифмы по одному основанию (10).

3) $\dfrac{1}{\lg x}+\dfrac{1}{1-\lg x}>1$

$$\frac{1-\lg x+\lg x-\lg x+\lg^2 x}{\lg x(1-\lg x)}>0$$

$$\frac{\lg^2 x-\lg x+1}{\lg x(1-\lg x)}>0$$

Дробь $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл, если $b\neq 0$

$\lg x$ имеет смысл, если $x>0$

4) Пусть $\lg x = t$, тогда решим неравенство:

$$\frac{t^2-t+1}{t(1-t)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t+1>0 \\ t(1-t)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(1-t)>0 \Leftrightarrow 0<t<1$$

$t^2-t+1=0$

$D=1-4<0 \Rightarrow t^2-t+1>0$

при любом t

если $\frac{a}{b}>0$ и если $a>0$,

то $b>0$

$t(1-t)>0$ решите методом интервалов:

5) $\begin{cases} 0<\lg x<1 \\ x>0 \\ x\neq 1;\ x\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg 1<\lg x<\lg 10 \\ x>0 \\ x\neq 1;\ x\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<10 \\ x>0 \\ x\neq 1;\ x\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<10$$

$y=\lg x$ возрастает ($a=10>1$), и если $\lg x>\lg m$, то $x>m>0$

Ответ: (1; 10).

2. ЭМ. $\log_x \frac{1}{4}+\log_4 x^{-1} \leq -2$

<u>*Решение.*</u>

1) ОДЗ: $x>0;\ x\neq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$

2) Приведем логарифмы к основанию 4

3) $-\log_x 4-\log_4 x \leq -2 \quad \Big| \cdot (-1)$

$\log_x 4+\log_4 x \geq 2$

$$\frac{1}{\log_4 x}+\log_4 x-2 \geq 0$$

4)—5) $\begin{cases} \log_4 x=t,\ t\neq 0 \\ \frac{1}{t}+t-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\log_a b$ имеет смысл, если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$

$\log_a b^n = n\log_a b$

$\frac{1}{4}=4^{-1}$; $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$;

$\log_x 4=\frac{1}{\log_4 x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_4 x,\ t\neq 0 \\ \dfrac{t^2-2t+1}{t}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_4 x,\ t\neq 0 \\ \dfrac{(t-1)^2}{t}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = t \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x>0 \\ x>0;\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x>\log_4 1 \\ x>0;\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

$(t-1)^2 \geq 0$ при любом t

$\dfrac{a}{b}\geq 0;\ a\geq 0 \Rightarrow b>0$

$y=\log_4 x$ возрастает $(a=4>1)$, и если $\log_4 x>\log_4 c$, то $x>c>0$

Ответ: $(1; +\infty)$.

Проверь себя!

Решите неравенство $\log^2_{0,1} x + 3\log_{0,1} x > 4$.

Ответ: $(0; 0,1) \cup (10^4; +\infty)$.

Алгоритм 75. Решение логарифмического неравенства способом разложения на множители

1. Найдите ОДЗ.
2. Перенесите все члены неравенства в левую часть.
3. Вынесите за скобки общий множитель.
4. Решите систему неравенств:

$$\text{если } a\cdot b\geq 0, \text{ то } \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a\leq 0 \\ b\leq 0 \end{cases}$$

$$\text{если } a\cdot b\leq 0, \text{ то } \begin{cases} a\geq 0 \\ b\leq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a\leq 0 \\ b\geq 0 \end{cases}$$

5. Согласуйте решение с ОДЗ на числовой оси.
6. Запишите ответ.



Решите неравенство $\log_3 x \cdot \log_2 x \geq 4\log_3 x$.

Решение.

1) ОДЗ: $x > 0$

2) $\log_3 x \cdot \log_2 x - 4\log_3 x \geq 0$

3) $\log_3 x \cdot (\log_2 x - 4) \geq 0$

4) $\begin{cases} \log_3 x \geq 0 \\ \log_2 x \geq 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} \log_3 x \leq 0 \\ \log_2 x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \geq \log_3 1 \\ \log_2 x \geq \log_2 16 \\ x > 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} \log_3 x \leq \log_3 1 \\ \log_2 x \leq \log_2 16 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 16 \\ x > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 16 \\ x > 0 \end{cases}$

$\log_2 x$ существует, если $x > 0$

$a \cdot b \geq 0$

$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

$y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$ — возрастающие функции ($a > 1$)

Если $\log_a x > \log_a b$, то $x > b > 0$

Если $\log_a x < \log_a b$, то $0 < x < b$

Ответ: $(0; 1] \cup [16; +\infty)$.

Проверь себя!

Решите неравенства.

1. $\log_2(3x+1) \cdot \log_3 x \geq 2\log_2(3x+1)$ 2. $\log_{\sqrt{3}}(x-2) \cdot \log_5 x \leq 2\log_3(x-2)$

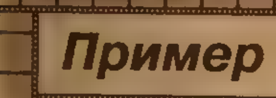
Ответ: 1. $[9; +\infty)$. 2. $[3; 5]$.

Алгоритм 76 Решение показательно-логарифмического неравенства

1. Найдите ОДЗ.
2. Освободитесь от знака логарифма, решая неравенство вида

$$\log_a f(x) \gtrless \log_a g(x) \text{ (по алгоритму 73)}$$

3. Решите показательное неравенство (по алгоритму 62).
4. Согласуйте решение с ОДЗ на числовой оси.
5. Запишите ответ.



Решите неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\geq -2$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in (-\infty; 1)$

$y=\log_a f(x)$ имеет смысл, если $f(x)>0$:

$6^{x+1}-36^x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6^{x+1}>6^{2x} \;\big|\; :6^x \Leftrightarrow 6>6^x \Rightarrow x<1$

2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\geq \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}=(\sqrt{5})^2=5$

$0<\frac{1}{\sqrt{5}}<1$,

если $0<a<1$ и $\log_a f(x)\geq \log_a m$, то $0<f(x)\leq m$

$6^{x+1}-6^{2x}\leq 5$

3) $6^{2x}-6\cdot 6^x+5\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=6^x,\ t>0^{(*)} \\ t^2-6t+5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=6^x,\ t>0 \\ (t-5)(t-1)\geq 0 \end{cases}$

$t^2-6t+5=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=6 \\ t_1\cdot t_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=1 \end{array}\right.$

Решим неравенство методом интервалов:



4) $\begin{cases} \left[\begin{aligned} &0<6^x\le 1 \\ &6^x\ge 5 \end{aligned}\right. \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &6^x\le 6^0 \\ &6^x\ge 6^{\log_6 5} \end{aligned}\right. \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x\le 0 \\ &x\ge \log_6 5 \end{aligned}\right. \\ x<1 \end{cases}$

0 $\log_6 5$ 1 x

$6>1 \Rightarrow y=6^x$ возрастает и если $6^m\le 6^n$, то $m\le n$

$6^x>0$ при любом x

$b=a^{\log_a b}$

$\log_6 5<1$, так как $\log_6 6=1$

Можно было упростить основание $\frac{1}{\sqrt{5}}=5^{-\frac{1}{2}}$

$\log_{5^{-\frac{1}{2}}} f(x)=-2\log_5 f(x)$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1)$.

Проверь себя!

Решите неравенства.

1. $\log_{0,5}(4-x)\ge\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1)$

2. ЭМ. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3^{x+2}-9^x)\ge -6$

3. ЭМ. $\dfrac{x+5}{\log_{\frac{1}{3}} x}>0$

Ответ: 1. $(1;\ 2]\cup[3;\ 4)$. 2. $(-\infty;\ 0]\cup[3\log_3 2;\ 2)$. 3. $(0;\ 1)$.

Алгоритм 77 Графическое решение логарифмического неравенства

1. Найдите ОДЗ, изобразите на числовой оси точки разрыва (если они есть) и проведите через них асимптоты.
2. Постройте графики функций, стоящих в левой и правой частях неравенства (например, если $f(x)\gtrless g(x)$, то $y=f(x)$ и $y=g(x)$).
3. Если одна функция возрастает, а другая убывает или const, то графики имеют не более одной общей точки. Опустите из точки пере-

сечения графиков перпендикуляр на ось Ox и найдите x_0 (подбором, если целое).

4. Возьмите $x_1 < x_0$ и $x_2 > x_0$ и проведите через точки $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ прямые, параллельные оси Oy, так, чтобы они пересекали оба графика.

5. Сравните ординаты точек пересечения прямых $x = x_1$ и $x = x_2$ с графиками и выберите нужное решение по условию $x > x_0$ или $x < x_0$.

6. Запишите ответ.



ЭМ. Решите неравенство $\log_2(2+x) > 1-x$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in (-2; +\infty)$ | $\log_2 f(x)$ имеет смысл при $f(x) > 0$

2) Пусть $y = \log_2(2 + x)$ и $y = 1 - x$. Построим графики функций (рис. 119).

3) Функция $y = \log_2(2 + x)$ возрастает ($a = 2 > 1$), $y = 1 - x$ убывает ($y = kx + b$, $k = -1 < 0$), значит, графики имеют не более одной общей

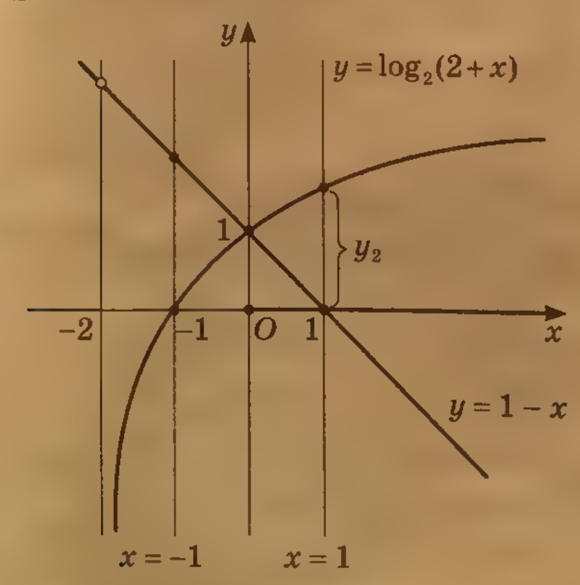


Рис. 119

$y = \log_2(2+x)$

x	-1	0	2
y	0	1	2

$y = 1 - x$

x	0	1
y	1	0

точки. Найдем подбором корень $x_0 \in (-2; +\infty)$. Пусть $x_0 = 0$, тогда: $f(0) = \log_2(0+2) = 1$; $g(0) = 1 + 0 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow f(0) = g(0)$, $x_0 = 0$ — корень

4) Пусть $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, проведем прямые $x = -1$ и $x = 1$.

5) Сравним ординаты точек пересечения прямой $x = 1$ с графиками: ордината графика функции $y = \log_2(2+x)$ больше ординаты графика функции $y = 1 - x$, справа от $x_0 = 0$, значит, решением неравенства будут $x > x_0 \Rightarrow x > 0$.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Замечание. Достаточно на глаз определить, какой график проходит выше, а какой ниже при одном и том же значении x_1 или x_2, и тогда второй случай при $x_2(x_1)$ уже не рассматривать.

Попробуй не реши!

1. ЭМ. Решите неравенство $\log_{0,1} x > -1$.

2. ЭМ. Укажите все натуральные решения неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 8) \geq -1$$

3. ЭМ. Решите неравенство $\dfrac{3x-4}{\log_{\frac{1}{2}} x} < 0$.

Ответ: 1. $(0; 10)$. 2. 1; 5. 3. $(0; 1) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Попробуй-ка реши!

Решите неравенства.

1. ЭМ. $(3x+4)\sqrt{-3x-2x^2-1} < 0$

2. ЭМ. $\log_x \dfrac{4x+1}{6(x-1)} < 0$

3. ЭМ. $\log_2 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leq 0$

Ответ: 1. Нет решения. 2. $(3,5; +\infty)$. 3. $\left(2-\sqrt{2}; \frac{3}{4}\right] \cup \left[3\frac{1}{4}; 2+\sqrt{2}\right)$.

§ 16 Иррациональные уравнения

Определение. Уравнение с одной переменной $f(x)=g(x)$ называется *иррациональным*, если хотя бы одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ содержит переменную x под знаком радикала (корня).

Например: $\sqrt{x-3}=x+1$; $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=2$

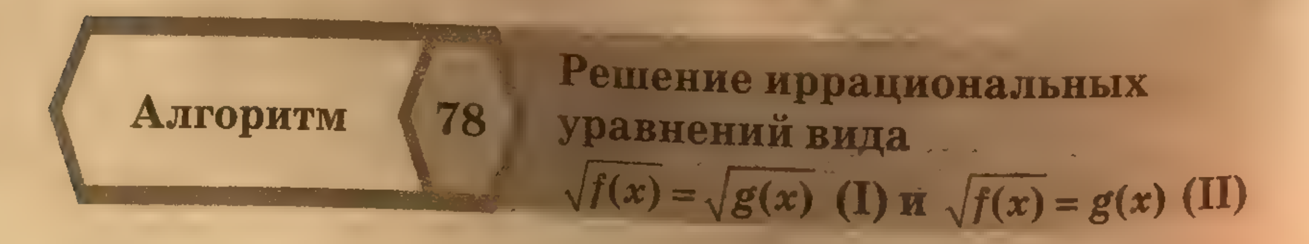
Условия равносильности иррациональных уравнений

I. $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x)\\g(x)\geq 0\end{cases}$

II. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\f(x)\geq 0\\g(x)\geq 0\end{cases}$

III. $f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\f(x_0)\text{ и }g(x_0)\text{ одного знака, }x_0\text{ — корень}\end{cases}$

Замечание. При решении иррациональных уравнений нечетной $(2k+1)$ степени ОДЗ находить не надо, но надо делать проверку всех найденных корней, так как в ходе решения могла быть нарушена равносильность.



Алгоритм 78

Решение иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ (I) и $\sqrt{f(x)}=g(x)$ (II)

I способ

1. Запишите условие равносильности.

2. Решите систему $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$ (I) или $\begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$ (II)

3. Согласуйте решение уравнения и неравенства на числовой оси.

4. Запишите ответ.



Решите уравнение $\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}$.

Решение.

1) $\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3} \Rightarrow \begin{cases} 2-x=x-3 \\ 2-x\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$ | $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

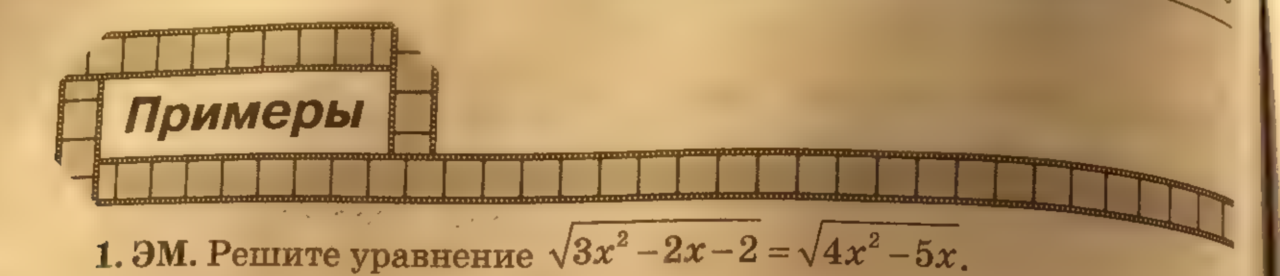
2) $\begin{cases} 2-x=x-3 \\ 2-x\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ x\le 2 \\ x\ge 3 \end{cases}$ | $x=2{,}5$

3) [числовая ось: 2; 2,5; 3; x]

Ответ: нет решений.

II способ

1. Возведите обе части уравнения $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ в квадрат.
2. Решите уравнение без знака корня.
3. Сделайте проверку каждого корня или определите знаки каждой части уравнения. Если знаки одинаковые, то число является корнем уравнения.
4. Запишите ответ.



1. ЭМ. Решите уравнение $\sqrt{3x^2-2x-2}=\sqrt{4x^2-5x}$.

Решение.

1) $\sqrt{3x^2-2x-2}=\sqrt{4x^2-5x}$;

$(\sqrt{3x^2-2x-2})^2=(\sqrt{4x^2-5x})^2$;

$3x^2-2x-2=4x^2-5x$

2) $3x^2-2x-2=4x^2-5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

$x_1=1;\ x_2=2$

$(\sqrt{f(x)})^2=(\sqrt{g(x)})^2 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

$(\sqrt{a})^2=a$ при $a\geq 0$

Проверка:

$x=1 \Rightarrow \sqrt{3-2-2}$ — не имеет смысла

$x=2 \Rightarrow \sqrt{12-6}=\sqrt{16-10} \Rightarrow \sqrt{6}=\sqrt{6}$ — истина

Ответ: 2.

Замечание. Иррациональное уравнение можно решать не следя за выполнением условий равносильности уравнений, но тогда необходима проверка всех корней, а для решения уравнения с условием равносильности проверка, как правило, не требуется.

2. ЭМ. Решите уравнение $3x+1=\sqrt{1-x}$.

Решение.

$3x+1=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(3x+1)^2=1-x\\3x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x^2+6x+1-1+x=0\\x\geq -\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$

Условие равносильности:

$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)=g^2(x)\\g(x)\geq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+7x=0 \\ x \ge -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{7}{9} \end{array}\right. \\ x \ge -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

$$-\frac{7}{9} < -\frac{3}{9}$$

Ответ: 0.

3. ЭМ. Дана функция $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}$. Решите уравнение $f(x)=-\frac{1}{2}$.

Решение.

1) Подставим вместо $f(x)$ число $\left(-\frac{1}{2}\right)$, получим уравнение

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}=-\frac{1}{2}$$

2) Применим свойство пропорции:

$$\sqrt{x^2+x-2}=-2(x+2)$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-2=(-2(x+2))^2 \\ -2(x+2)>0 \quad \Big| :(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=4(x^2+4x+4) \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+15x+18=0 \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+6=0 \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-3 \end{array}\right. \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-5 \\ x_1 \cdot x_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Ответ: −3.

Проверь себя!

Решите уравнения.

1. $8-3x=\sqrt{x+2}$

2. $\sqrt{x^2-x+3}=\sqrt{3x^2-5x+6}$

3. $x-2=\sqrt{2-x}$

Ответ: 1. 2. 2. Нет решений. 3. 2.

Алгоритм 79 Решение иррационального уравнения, содержащего несколько радикалов ($\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$)

I способ

1. Найдите ОДЗ, учитывая, что $\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\geq 0$, и решите систему неравенств $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ \varphi(x)\geq 0 \end{cases}$
2. Перенесите радикал четной степени в ту часть уравнения, где он будет с плюсом, а остальные члены в другую часть уравнения.
3. Возведите в квадрат обе части уравнения, если корни квадратные, или в куб, если корни кубические.
4. Запишите условие равносильности для уравнения

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

5. Решите уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$.
6. Составьте систему из ОДЗ и условия равносильности уравнения и решите ее.
7. Запишите ответ.



Решите уравнение $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x\ge 0{,}5 \\ x\ge \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \frac{2}{3}$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл, если $f(x)\ge 0$

$x \in \left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$

2) $\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}$

Обе части уравнения положительные:

$\sqrt{f(x)}\ge 0$

3) Возведем в квадрат обе части уравнения:

$(\sqrt{x+3})^2=\Big(\underbrace{\sqrt{2x-1}}_{a}+\underbrace{\sqrt{3x-2}}_{b}\Big)^2;$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$x+3=2x-1+3x-2+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x-2};$

$x+3=5x-3+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x-2};$

$6-4x=2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x-2};$

$3-2x=\sqrt{(2x-1)(3x-2)}$

Условие равносильности:

$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (2x-1)(3x-2)=(3-2x)^2 \\ 3-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-7x+2-9+12x-4x^2=0 \\ x\le 1{,}5 \end{cases}$

5) $2x^2+5x-7=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{4}$

$x_{1,2}=\frac{-5\pm 9}{4}$

$x_1=1,\ x_2=-\frac{7}{2}$

$$6)\ \begin{cases} 2x^2+5x-7=0 \\ x\le 1{,}5 \\ x\ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3{,}5 \end{array}\right. \\ \dfrac{2}{3}\le x\le 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Ответ: 1.

II способ (без нахождения ОДЗ)

1. Приведите обе части уравнения к положительным выражениям (перенесите радикалы с минусом в ту часть уравнения, где они будут со знаком «плюс», если $\sqrt[2k]{f(x)}$).
2. Возведите обе части уравнения в квадрат.
3. Если вновь получится радикал $\sqrt[2k]{f(x)}$, то перенесите его в ту часть уравнения, где он будет со знаком «плюс», а все остальные члены уравнения перенесите в другую часть уравнения. Упростите уравнение.
4. Возведите обе части уравнения (п. 3) в квадрат и решите уравнение без знака радикала.
5. Сделайте проверку всех корней уравнения.
6. Запишите ответ.

Замечание. Этот способ решения уравнения более формальный, без учета ОДЗ; могут появиться посторонние корни, поэтому обязательна проверка всех корней.



ЭМ. Дана функция $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-4x}{x-4}}$. Решите уравнение $f(x)=x-2$.

Решение.

1) $\sqrt{\dfrac{x^3-4x}{x-4}}=x-2$

2) $\dfrac{x^3-4x}{x-4}=(x-2)^2$

$x^3-4x=x(x^2-4)$

$x(x^2-4)=(x-2)^2(x-4)$

3)—4) Получили уравнение, не содержащее радикала; решим его:

$x(x-2)(x+2)-(x-2)^2(x-4)=0;$

$(x-2)(x(x+2)-(x-2)(x-4))=0$

$\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ x(x+2)-(x-2)(x-4)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\end{array}\right.$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$x(x+2)-(x-2)(x-4)=$

$=x^2+2x-x^2+6x-8=$

$=8x-8$

$8x-8=0$

$x=1$

Проверка:

$$x_0=2\Rightarrow\sqrt{\frac{8-8}{-2}}=2-2\Rightarrow 0=0 \text{ — истина}$$

$$x_0=1\Rightarrow\sqrt{\frac{1-4}{1-4}}=1-2\Rightarrow 1=-1 \text{ — ложно}$$

Ответ: 2.

Полезный совет. Если при проверке корня x_0 левая и правая части уравнения принимают противоположные знаки, то x_0 — посторонний корень; если одинаковые знаки, то x_0 может быть корнем уравнения.

Алгоритм 80. Решение иррационального уравнения с применением свойств монотонности функции

1. Найдите ОДЗ.
2. Определите монотонность функций в каждой части уравнения на ОДЗ.

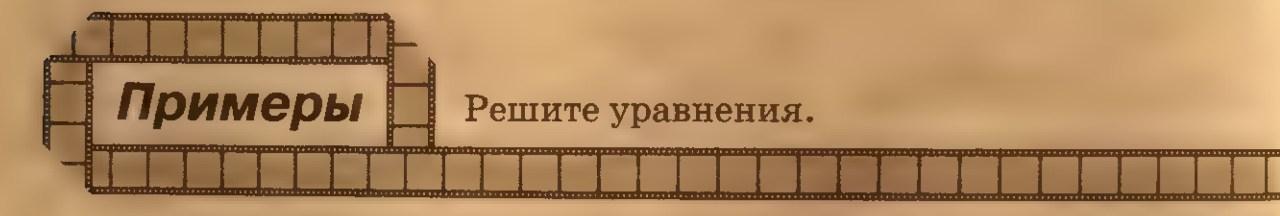
Если функция, стоящая в одной части уравнения, строго возрастает, а функция в другой части строго убывает (или const), то уравнение имеет не более одного корня. Функция $y=\sqrt{f(x)}$ возрастает (убывает), если $f(x)$ возрастает (убывает).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ обе возрастают или обе убывают, то их сумма тоже будет возрастать или убывать.

Например: $y=\sqrt[3]{x}+2x$; $f(x)=\sqrt[3]{x}$ возрастает, $g(x)=2x$ возрастает $(k>0) \Rightarrow y=f(x)+g(x)$ возрастает

3. Проверьте целые значения из ОДЗ подстановкой их в уравнение; если целых корней нет, то решайте по алгоритмам, данным ранее.

4. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{7-x}$

<u>*Решение.*</u>

1) ОДЗ: $x \in [2,5;\ 7]$, так как

$$\begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ x-2\ge 0 \\ 7-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2,5 \\ x\ge 2 \\ x\le 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2,5\le x\le 7$$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\ge 0$

2) Монотонность подкоренных выражений:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x-5 \text{ возрастает} \\ y_2 &= x-2 \text{ возрастает} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y=\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}$ возрастает

$y_3=7-x$ убывает

$y=kx+b(\uparrow)$, если $k>0$

$k_1=2;\ k_2=1$

$y=kx+b(\downarrow)$, если $k<0$

$k_3=-1$

Вывод. Значит, уравнение имеет не более одного корня.

3) Испытаем целые числа из ОДЗ [2,5; 7]: 3; 4; 5; 6; 7 подстановкой их в уравнение.

Пусть $x_0=3$: $\sqrt{3\cdot2-5}+\sqrt{3-2}=\sqrt{7-3} \Leftrightarrow \sqrt{1}+\sqrt{1}=\sqrt{4} \Leftrightarrow 2=2$ — истина, $x_0=3$ — корень, и он единственный

Ответ: 3.

2. $\sqrt{2-2x}=x+3$

Решение.

1) ОДЗ: $x\in(-\infty;\ 1]$	$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\ge0$
$2-2x\ge0 \Leftrightarrow x\le1$	$y=kx+b(\downarrow)$, если $k<0$; $k=-2$
2) $y_1=2-2x$ убывает	$y=kx+b(\uparrow)$, если $k>0$; $k=1$
$y_2=x+3$ возрастает	

3) Уравнение имеет не более одного корня на ОДЗ. Испытаем целые числа из ОДЗ $(-\infty;\ 1]$: ..., –2, –1, 0, 1 (мысленно прикиньте, какое число может подойти из данных, и проверьте его).

$x_0=1$: $\sqrt{2-2\cdot1}\doteq1+3$ — ложно

$x_0=-1$: $\sqrt{2-2\cdot(-1)}=-1+3 \Leftrightarrow \sqrt{4}=2$ — истина, значит, $x_0=-1$ — корень, и он единственный

Ответ: –1.

Полезный совет. Подбирайте такое число из ОДЗ, чтобы извлекался корень, и проверяйте его. Этот способ применим, когда функции под знаком радикала монотонные на ОДЗ.

Проверь себя!

Решите уравнение $\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}=2$.

Ответ: 4.

Алгоритм 81 Решение иррационального уравнения введением новой переменной

1. Если в уравнении $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{g(x)} = a$ даны корни с разными показателями, то обозначьте $\sqrt[n]{f(x)} = u$ (I) и $\sqrt[m]{g(x)} = v$ (II).
2. Возведите в степень n обе части уравнения I и в степень m обе части уравнения II и составьте систему

$$\begin{cases} f(x) = u^n \\ g(x) = v^m \end{cases} \quad \text{(III)}$$

3. Исключите x из уравнений системы III.
4. Решите полученную систему относительно u и v.
5. Решите уравнения I и II относительно x.
6. Сделайте проверку всех корней.
7. Запишите ответ.



Решите уравнения.

1. $\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{2x-3}$

<u>*Решение.*</u>

1) В левой части уравнения корень 2-й степени, в правой — 3-й степени. Пусть $\sqrt{x-1} = u \geq 0$; $\sqrt[3]{2x-3} = v$.

2) $\begin{cases} x-1 = u^2 & \big| \cdot(-2) \\ 2x-3 = v^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2 = -2u^2 \\ 2x-3 = v^3 \end{cases}$

3) Исключим x: $+\begin{cases}-2x+2=-2u^2\\ 2x-3=v^3\end{cases}$

$$-1=v^3-2u^2$$

4) Решим систему:

$$\begin{cases}u=v\\ v^3-2u^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v\\ u^3-2u^2+1=0\end{cases}$$

Найдите положительные делители свободного члена 1 (это число 1) и подставьте в уравнение $u^3-2u^2+1=0$
$1-2+1=0$ — истина,
значит, $u=v=1$

5) $$\begin{cases}u=v=1\\ \sqrt{x-1}=1\\ \sqrt[3]{2x-3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v=1\\ x=2\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Проверка: $\sqrt{2-1}=\sqrt[3]{4-3}\Leftrightarrow 1=1$ — истина, значит, 2 — корень

Ответ: 2.

2. $\sqrt[3]{30-x}+\sqrt[3]{x+5}=5$

Решение.

1) Пусть $\sqrt[3]{30-x}=u$, $\sqrt[3]{x+5}=v$

2) $\begin{cases}30-x=u^3\\ x+5=v^3\end{cases}$

3) Исключим x: $+\begin{cases}30-x=u^3\\ x+5=v^3\end{cases}$

$$35=u^3+v^3$$

4) Решим систему:

$$\begin{cases}u+v=5\\ u^3+v^3=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=35\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ 5(u^2-uv+v^2)=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ u^2-uv+v^2=7\end{cases}$$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

5) $\begin{cases} u=5-v \\ (5-v)^2-v(5-v)+v^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$(5-v)^2-v(5-v)+v^2=$
$=25-10v+v^2-5v+v^2+v^2=$
$=3v^2-15v+25$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ 3v^2-15v+25=7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ 3v^2-15v+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$v^2-5v+6=0$

$\begin{cases} v_1+v_2=5 \\ v_1 \cdot v_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v=3 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ v^2-5v+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v=3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{30-x}=2 \\ \sqrt[3]{x+5}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{30-x}=3 \\ \sqrt[3]{x+5}=2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 30-x=8 \\ x+5=27 \end{cases} \\ \begin{cases} 30-x=27 \\ x+5=8 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=22 \\ x=22 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ x=3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=22 \end{array} \right.$$

Проверка:

а) $x_0=3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30-3}+\sqrt[3]{3+5}=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}=3+2=5;$ $5=5$ — истина, значит, $x_0=3$ — корень

б) $x_0=22 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30-22}+\sqrt[3]{22+5}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}=2+3=5;$ $5=5$ — истина, значит, $x_0=22$ — корень

Ответ: 3; 22.

Полезный совет. При решении иррациональных уравнений определите по внешнему виду примера, как удобнее решать: с учетом условий равносильности или применяя проверку всех корней уравнения. Сразу обратите внимание на монотонность функций, стоящих под знаком радикала, и, если есть возможность, устно подберите корни из ОДЗ уравнения, обоснуйте свой выбор и убедитесь проверкой в правильности найденного корня.

3. $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8$

Решение.

Применим введение новой переменной.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$, так как $2x^2-4x+12>0$ при любых x

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\ge 0$

$D=16-96<0$

$a>0 \Rightarrow$ при $x\in \boldsymbol{R}$ $f(x)>0$

2) $\sqrt{2x^2-4x+12}+2x^2-4x=8 \quad \Big| +12$

$\sqrt{2x^2-4x+12}+(2x^2-4x+12)=20$

3) $\begin{cases}\sqrt{2x^2-4x+12}=t,\ t\ge 0^{(*)}\\ 2x^2-4x+12=t^2\\ t+t^2=20\end{cases} \Leftrightarrow$

$\sqrt{a}\ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2-4x+12}=t,\ t\ge 0^{(*)}\\ t^2+t-20=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$t^2+t-20=0$

$\begin{cases}t_1+t_2=-1\\ t_1\cdot t_2=-20\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-5\\ t=4\end{array}\right.$ —

-5 — не удовлетворяет (*)

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=4\\ \sqrt{2x^2-4x+12}=4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+12=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$

$x^2-2x-2=0$

$x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+2}=1\pm\sqrt{3}$

Проверка: а) $x_0=1+\sqrt{3}$

Левая часть:

$$2\cdot(1+\sqrt{3})^2+\sqrt{2(1+\sqrt{3})^2-4(1+\sqrt{3})+12}=$$

$$=2\cdot(1+2\sqrt{3}+3)+\sqrt{2+4\sqrt{3}+6-4-4\sqrt{3}+12}=$$

$$=2+4\sqrt{3}+6+\sqrt{16}=2+4\sqrt{3}+6+4=12+4\sqrt{3}$$

Правая часть: $4(1+\sqrt{3})+8=4+4\sqrt{3}+8=12+4\sqrt{3}$

$12+4\sqrt{3}=12+4\sqrt{3}$ — истина, значит, $1+\sqrt{3}$ — корень

б) $x_0=1-\sqrt{3}$

Левая часть:

$$2\cdot(1-\sqrt{3})^2+\sqrt{2(1-\sqrt{3})^2-4(1-\sqrt{3})+12}=$$
$$=2-4\sqrt{3}+6+\sqrt{2-4\sqrt{3}+6-4+4\sqrt{3}+12}=$$
$$=8-4\sqrt{3}+\sqrt{16}=8-4\sqrt{3}+4=12-4\sqrt{3}$$

Правая часть: $4(1-\sqrt{3})+8=4-4\sqrt{3}+8=12-4\sqrt{3}$

$12-4\sqrt{3}=12-4\sqrt{3}$ — истина, значит, $1-\sqrt{3}$ — корень

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

4. $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{4-x^2}=\sqrt{x^2-3x-10}$

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases} x^2+3x+2\ge 0 \\ 4-x^2\ge 0 \\ x^2-3x-10\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+2)\ge 0 \\ (2-x)(2+x)\ge 0 \\ (x-5)(x+2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\ge 0$

$x^2+3x+2=0$ $\quad$ $x^2-3x-10=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1\cdot x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \end{array}\right.$ $\quad$ $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=10 \end{cases}$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2 \end{array}\right.$

2) Проверим, является ли корнем число (–2):

$\sqrt{(-2)^2+3(-2)+2}+\sqrt{4-(-2)^2}=\sqrt{(-2)^2-3(-2)-10}=\sqrt{0}=0$

$\sqrt{4-6+2}+\sqrt{4-4}=\sqrt{4+6-10}$; $0=0$ — истина $\Rightarrow -2$ — корень

Ответ: –2.

Попробуй не реши!

Решите уравнения.

1. $\sqrt{1+3x}=1-x$

2. $\frac{2}{2-\sqrt{x}}+0{,}5=\frac{4}{2\sqrt{x}-x}$

Ответ: **1. 0. 2. 16.**

Попробуй-ка реши!

Решите уравнения.

1. ЭМ. $\sqrt{2x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-3x+2}=0$

2. ЭМ. $\sqrt{5-x^2}=x-1$

3. ЭМ. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}}=1$

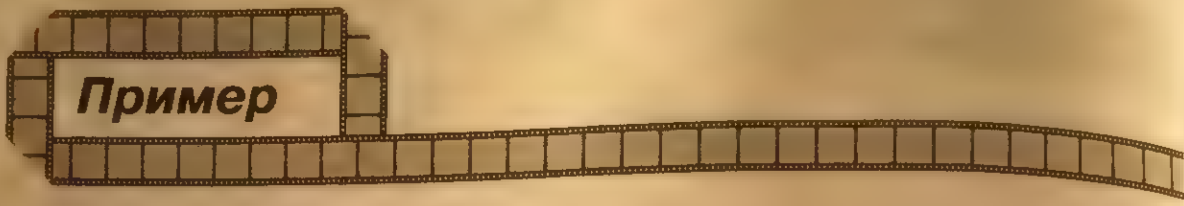
Ответ: **1. –1; 1. 2. 2. 3. 4.**

Алгоритм 82. Решение иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=a$ (a — число)

1. Найдите ОДЗ.
2. Запишите выражение, сопряженное левой части уравнения: $\sqrt{f(x)}\mp\sqrt{g(x)}=y$, перемножьте левые и правые части уравнений и найдите y: $y=b$.
3. Составьте и решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=a\\ \sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=b\end{cases}$$

4. Проверьте найденные корни по ОДЗ.
5. Запишите ответ.



Решите уравнение $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-8}=12$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in [8; +\infty)$

$\begin{cases} x+4\ge 0 \\ x-8\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge 8$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\ge 0$

2) $\times \begin{cases} \sqrt{x+4}+\sqrt{x-8}=12 \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}=y \end{cases}$

Пусть $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}=y$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$x+4-(x-8)=12y \Rightarrow x+4-x+8=12y \Rightarrow 12=12y \Rightarrow y=1$

3) Решим систему уравнений:

$+\begin{cases} \sqrt{x+4}+\sqrt{x-8}=12 \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}=1 \end{cases}$

$2\sqrt{x+4}=13$

Решим уравнение $2\sqrt{x+4}=13$:

$4(x+4)=169 \Leftrightarrow 4x+16=169 \Leftrightarrow 4x=153 \Leftrightarrow x=38\frac{1}{4}$

4) $38\frac{1}{4}\in\left[8; +\infty\right)$

Ответ: $38\frac{1}{4}$.

З а м е ч а н и е. Если сомневаетесь, что корень вами найден верно, проверьте его: $\sqrt{\frac{153}{4}+4}+\sqrt{\frac{153}{4}-8}=\sqrt{\frac{169}{4}}+\sqrt{\frac{121}{4}}=\frac{13}{2}+\frac{11}{2}=\frac{24}{2}=12;$

$12=12$ — истина

Примеры решения иррациональных уравнений (ЕГЭ и ЭМ)

1. ЕГЭ. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3$.

1) $(-\infty; 1]$; 2) $(1; 2]$; 3) $(2; 5]$; 4) $(5; +\infty)$

Решение.

$$x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3 \Leftrightarrow x-3=\sqrt{2x^2-9x+5}$$

$$\begin{cases} x-3\ge 0 \\ (x-3)^2=2x^2-9x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-6x+9=2x^2-9x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

$4\in(2; 5]$

Условие равносильности:

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ g^2(x)=f(x) \end{cases}$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Ответ: номер верного ответа: 3.

2. ЕГЭ. Решите уравнение

$$\sqrt{25-\frac{11}{\log_x 10}}=10\lg\left(10^{\frac{2}{5}}\cdot(0{,}1x)^{-0{,}1}\right)$$

Решение.

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0;\ x\ne 1 \\ 25-11\lg x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0;\ x\ne 1 \\ \lg x\le \lg 10^{\frac{25}{11}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\log_a b$ имеет смысл, если $b>0$, $a>0$, $a\ne 1$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\ge 0$

$$\frac{11}{\log_x 10}=11\lg x \qquad \frac{1}{\log_a b}=\log_b a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0;\ x\ne 1\\ x\le 10^{\frac{25}{11}}\end{cases}$$

$x \in (0;\ 1)\cup\left(1;\ 10^{\frac{25}{11}}\right)$

$y=\lg x\ (\uparrow)$ и если

$\lg m\le \lg n$, то $0<m\le n$

$n\lg b=\lg b^n$

$\lg(ab)=\lg a+\lg b$

2) $\sqrt{25-11\lg x}=\lg\left(\underbrace{10^{\frac{2}{5}}\cdot(0{,}1x)^{-0{,}1}}_{b}\right)^{10}$;

$\sqrt{25-11\lg x}=\lg\left(10^5\cdot x^{-1}\right)$;

$\sqrt{25-11\lg x}=\lg 10^5+\lg x^{-1}$;

$\sqrt{25-11\lg x}=5-\lg x$

$\left(10^{\frac{2}{5}}\cdot(0{,}1\cdot x)^{-0{,}1}\right)^{10}=10^{\frac{2\cdot 10}{5}}\cdot(0{,}1\cdot x)^{-1}=$

$=10^4\cdot 10^1\cdot x^{-1}=10^5\cdot x^{-1}$

$(a^r)^p=a^{rp}$; $(abc)^r=a^rb^rc^r$

$\log_a a^n=n$

$\lg b^n=n\lg b$

Условие равносильности:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)\ge 0\\ g^2(x)=f(x)\end{cases}$$

Пусть $\lg x=t$, получим уравнение

$$\sqrt{25-11t}=5-t\Leftrightarrow\begin{cases}5-t\ge 0\\ 25-11t=(5-t)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 5\\ 25-11t=25-10t+t^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 5\\ t^2+t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 5\\ \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lg x\le 5\\ \left[\begin{array}{l}\lg x=0\\ \lg x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 10^5\\ x>0;\ x\ne 1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0{,}1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=0{,}1$$

3) Согласуем с ОДЗ решение: $0{,}1\in(0;\ 1)$

Ответ: 0,1.

3*. ЕГЭ. Решите уравнение $\sqrt{9-4x|x-4|}-4x=3$.

Решение.

$\sqrt{9-4x|x-4|}=3+4x$

$$\begin{cases}9-4x|x-4|=(3+4x)^2\\ 3+4x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

Условие равносильности:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)\ge 0\\ g^2(x)=f(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{9}-4x|x-4|=\cancel{9}+24x+16x^2 \; | : 4 \\ x \geq -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x|x-4|=4x^2+6x \\ x \geq -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 4 \cap x \geq -\dfrac{3}{4} \\ -x(x-4)=4x^2+6x \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{3}{4} \leq x < 4 \\ x(x-4)=4x^2+6x \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 4 \\ x_1=0; \; x_2=-\dfrac{2}{5} \end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases} -\dfrac{3}{4} \leq x < 4 \\ x_1=0; \; x_2=-3\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x=0 \end{array} \right.$$

$$|a| \Leftrightarrow \begin{cases} a; \; a \geq 0 \\ -a; \; a < 0 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4; \; x \geq 4 \\ 4-x; \; x < 4 \end{cases}$$

$5x^2+2x=0$

$x(5x+2)=0$

$x_1=0; \; x_2=-\dfrac{2}{5}$

$3x^2+10x=0$

$x(3x+10)=0$

$x_1=0; \; x_2=-\dfrac{10}{3}=-3\dfrac{1}{3}$

Первая система не имеет решений

Ответ: 0.

§ 17 Решение иррациональных неравенств

Определение. Неравенства, в которых переменная стоит под знаком радикала, называются *иррациональными*.

Решение иррациональных неравенств с четным показателем корня сводится к решению трех типов простых неравенств:

I. $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless b$, где b — число

II. $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless \varphi(x)$, $\varphi(x)$ — функция от x

III. $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless \sqrt[2k]{\varphi(x)}$, $\varphi(x)$ — функция от x

Условия равносильности иррациональных неравенств

I. $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless b$. Рассмотрим случаи:

1) $\sqrt[2k]{f(x)} \geq b \Rightarrow f(x) \geq b^{2k}$ при $b \geq 0$

2) $\sqrt[2k]{f(x)} \geq b \Rightarrow f(x) \geq 0$ при $b < 0$

3) $\sqrt[2k]{f(x)} \leq b \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq b^{2k} \end{cases}$ при $b \geq 0$

4) $\sqrt[2k]{f(x)} \leq b$ не имеет решений при $b < 0$

II. $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless \varphi(x)$. Рассмотрим случаи:

1) $\sqrt[2k]{f(x)} \geq \varphi(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) \geq \varphi^{2k}(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

2) $\sqrt[2k]{f(x)} \leq \varphi(x) \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq \varphi^{2k}(x) \end{cases}$

3) $\sqrt[2k]{f(x)} \leq \varphi(x)$ не имеет решений, если $\varphi(x) < 0$ при любом x

III. $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless \sqrt[2k]{\varphi(x)}$. Рассмотрим случаи:

1) $\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) > \varphi(x) \end{cases}$

2) $\sqrt[2k]{f(x)} < \sqrt[2k]{\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}$

Полезный совет. Если дан III тип, то ОДЗ находите по меньшему члену неравенства (если $\sqrt[2k]{f(x)} < \sqrt[2k]{\varphi(x)}$, то $f(x) \geq 0$).



Алгоритм 83. Решение неравенств вида $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless b$, $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless \varphi(x)$, $\sqrt[2k]{f(x)} \gtrless \sqrt[2k]{\varphi(x)}$

1. Запишите условие равносильности за чертой для I, II или III типа неравенств и примените его к данному неравенству (составьте систему неравенств по условию равносильности).
2. Решите систему неравенств и изобразите решение на оси.
3. Запишите ответ.



Примеры

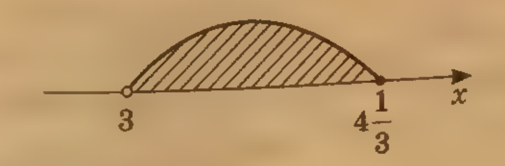
Решите неравенства.

1. $\sqrt{13-3x}<2$ 2. $\sqrt{x^2+5x-5}\geq 1$

Решение.

1. 1) $\begin{cases} 13-3x\geq 0 \\ 13-3x<4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 13-3x\geq 0 \\ 13-3x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\leq 13 \\ 3x>9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4\frac{1}{3} \\ x>3 \end{cases}$



$3<x\leq 4\frac{1}{3}$

Ответ: $\left(3;\ 4\frac{1}{3}\right]$.

Условие равносильности I типа:

$\sqrt{f(x)}<b,\ b>0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)<b^2 \end{cases}$

2. $x^2+5x-5\ge 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+5x-6\ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+6)(x-1)\ge 0$



Условие равносильности I типа:

$\sqrt{f(x)}\ge b,\ b>0 \Rightarrow f(x)\ge b^2$

$x^2+5x-6=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=-5 \\ x_1\cdot x_2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=1 \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -6]\cup[1; +\infty)$.

Проверь себя!

Решите неравенства.

1. $\sqrt{2-x}>3$ 2. $\sqrt{3x+2}<4$ 3. $\sqrt{5+x}>-1$

Ответ: 1. $(-\infty; -7)$. 2. $\left[-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$. 3. $[-5; +\infty)$.

3. $\sqrt{x-2}>x-3$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3\ge 0 \\ x-2>(x-3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3<0 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-7x+11<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ x\ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3 \\ \left(x-\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)<0 \end{cases} \\ 2\le x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\le x<\frac{7+\sqrt{5}}{2} \\ 2\le x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2\le x<\frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

Условие равносильности II типа:

$$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2-7x+11=0$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-44}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\frac{7-\sqrt{5}}{2}\approx 2{,}4;\ \frac{7+\sqrt{5}}{2}\approx 4{,}6$

Ответ: $\left[2;\ \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. $\sqrt{x^2-2x-3}<\sqrt{6(x+1)}$

Решение.

$$\begin{cases}x^2-2x-3<6(x+1)\\x^2-2x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x-9<0\\x^2-2x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-9)(x+1)<0 & (I)\\(x-3)(x+1)\ge 0 & (II)\end{cases}\Leftrightarrow 3\le x<9$$

Условие равносильности III типа:

$$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\f(x)<g(x)\end{cases}$$

$x^2-8x-9=0$

$$\begin{cases}x_1+x_2=8\\x_1\cdot x_2=-9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=-1\end{array}\right.$$

$x^2-2x-3=0$

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1\cdot x_2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$$

Ответ: [3; 9).

Полезный совет. Если сомневаетесь в полученном ответе, то возьмите из каждого промежутка решения одно пробное число и подставьте (хотя бы устно) в заданное неравенство. Если получите верное числовое неравенство, то промежуток найден верно.

Проверь себя!

Решите неравенства.

1. $\left(\sqrt{10-x}\right)^2\le\left(\sqrt{10+x}\right)^2$

2. $\sqrt{4-x}<\sqrt{x-6}$

Ответ: 1. [0; 10]. 2. Нет решений.

Алгоритм 84. Решение иррационального неравенства вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \gtrless \sqrt{\varphi(x)}$

1. Найдите ОДЗ: решите систему неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$
2. Решите уравнение $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$.
3. Отметьте на оси Ox ОДЗ и корни (п. 2), которые входят в ОДЗ.
4. Возьмите пробное число из каждого промежутка ОДЗ (п. 3) и подставьте в исходное неравенство; тот промежуток, в котором неравенство будет верным, будет решением исходного неравенства.
5. Проверьте подстановкой концы промежутка.
6. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1} \geq \sqrt{x-2}$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in [2; +\infty)$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x) \geq 0$

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

2) Решим уравнение:

$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$2x-3 = x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}+x-2 \Leftrightarrow$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ или $x=2$

Если $\sqrt{f(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$ и $\varphi(x)\geq 0$, то $(\sqrt{f(x)})^2=(\sqrt{\varphi(x)})^2$

3)

4) Пусть $x=3$; $3\in[2;+\infty)$, тогда $\sqrt{2\cdot 3-3}-\sqrt{3-1}\geq\sqrt{3-2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}\geq\sqrt{1}$ — ложно. Значит, на промежутке $(2;+\infty)$ нет решения.

5) Проверим $x=2$: $\sqrt{4-3}-\sqrt{2-1}\geq\sqrt{0}$, $\sqrt{1}-\sqrt{1}\geq 0$ — истина: $0=0$

Ответ: 2.

З а м е ч а н и е. По этому алгоритму можно решать и неравенства вида $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)} \gtreqless \varphi(x)$.

2. $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>\sqrt{1-x}-\sqrt{6-x}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 3 \\ x\leq 1 \\ x\leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x\geq 2 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\geq 0$

ОДЗ: $\varnothing$, значит, неравенство не выполняется ни при каком значении x.

Ответ: нет решений.

3. $\sqrt{x-5}-\sqrt{10-x}\geq 1$

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases} x-5\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ x\leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\leq x\leq 10$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл при $f(x)\geq 0$

ОДЗ: $x \in [5; 10]$

2) $\sqrt{x-5}-\sqrt{10-x} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} \geq 1+\sqrt{10-x}$

Решим уравнение:

$\sqrt{x-5}=1+\sqrt{10-x}$ (I)

Функция $y_1=x-5$ возрастает и непрерывна

Функция $y_2=10-x$ убывает и непрерывна

Значит, уравнение I имеет не более одного корня на ОДЗ: [5; 10]

Примените свойство монотонности функций:

$y=kx+b(\uparrow)$, если $k>0$

$y=kx+b(\downarrow)$, если $k<0$

$f(x)$ возрастает и непрерывна, $\varphi(x)$ убывает и непрерывна, значит, уравнение $f(x)=\varphi(x)$ имеет не более одного корня

3) Испытаем числа 5, 6, 7, 8, 9, 10 из промежутка [5; 10]:

$x_0=6$: $\sqrt{6-5}=1+\sqrt{10-6} \Leftrightarrow \sqrt{1}=1+\sqrt{4}$, $1=1+2$ — ложно;

$x_0=9$: $\sqrt{9-5}=1+\sqrt{10-9} \Leftrightarrow \sqrt{4}=1+\sqrt{1}$, $2=2$ — истина;

$x_0=9$ — корень уравнения, и он единственный.

4) Выберем промежуток-решение:

а) [5; 9]. Пусть $x=8$: $\sqrt{8-5}-\sqrt{10-8} \geq 1$, получим $\sqrt{3}-\sqrt{2} \geq 1$ — ложно, значит, отрезок [5; 9] не является решением;

б) [9; 10]. Пусть $x=9{,}5$: $\sqrt{9{,}5-5}-\sqrt{10-9{,}5} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{4{,}5}-\sqrt{0{,}5} \geq 1$ — истина, значит, [9; 10] — решение неравенства.

Ответ: [9; 10].

Попробуй-ка реши!

Решите неравенства.

1. $x<\sqrt{2-x}$
2. $\sqrt{(x-3)(2-x)}<3+2x$
3. $x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}$

4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$

5. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$

Ответ: **1.** $(-\infty; 1)$. **2.** $[2; 3]$. **3.** $(-9; 4)$. **4.** $[-4; -2) \cup (0; +\infty)$. **5.** $(5; +\infty)$.

Рассмотрим теперь иррациональные **неравенства с нечетным показателем корня.**

Корень нечетной степени существует из положительных и отрицательных чисел, поэтому знак выражения, стоящего под корнем нечетной степени, не влияет на равносильность преобразований корней нечетной степени, равно как и знак числа b. При возведении в степень $(2k+1)$ обеих частей неравенства отрицательное число даст тоже отрицательное число.

Алгоритм 85

Решение неравенств вида
$\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless b$ или
$\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless \sqrt[2k+1]{g(x)}$

1. Приведите неравенство к виду $\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless b$ или $\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless \sqrt[2k+1]{g(x)}$.
2. Возведите обе части неравенства в степень $(2k+1)$ и решите неравенство $f(x) \gtrless b^{2k+1}$ или $f(x) \gtrless g(x)$.
3. Проверьте корни.
4. Запишите ответ.



Решите неравенства.

1. $\sqrt[3]{x-2} + 3 < 0$

2. $\sqrt[5]{x+7} \ge \sqrt[5]{21-x}$

Решение.

1. 1) $\sqrt[3]{x-2}+3<0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}<-3$

ОДЗ: $x \in R$

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

2) $\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3<(-3)^3 \Leftrightarrow x-2<-27 \Leftrightarrow x<-25$

3) Пусть $x=-30$. Убедимся, что $\sqrt[3]{-32}+3<0$

Ответ: $(-\infty; -25)$.

2. $\left(\sqrt[5]{x+7}\right)^5 \geq \left(\sqrt[5]{21-x}\right)^5 \Leftrightarrow x+7 \geq 21-x \Leftrightarrow 2x \geq 14 \Leftrightarrow x \geq 7$

Ответ: $[7; +\infty)$.

Замечание. Решение неравенств вида $\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless g(x)$ выходит за рамки школьного курса.

§ 18 Уравнения с параметром

Уравнение, которое, кроме переменной, содержит известную величину, обозначенную буквой, называется *уравнением с параметром*.

Определение. *Решить уравнение с параметром* — значит найти, при каких значениях параметра уравнение имеет корни, их количество и при каких значениях параметра уравнение не имеет решения.

Алгоритм 86 Решение уравнения с параметром

1. Найдите ОДЗ для переменной и параметра.
2. Решите уравнение относительно переменной, считая параметр известной величиной.
3. Исследуйте решения на ОДЗ.
4. Сделайте анализ отобранных корней при всех допустимых значениях параметра.

5. Запишите ответ с подробным пояснением решения относительно параметра.

Алгоритм 87 Решение линейного уравнения с параметром

1. Приведите уравнение к виду $a \cdot x = b$.
2. Найдите $x = \frac{b}{a}$.
3. Сделайте анализ решения:
   1) если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то линейное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$;
   2) если $a \neq 0$, $b = 0$, то уравнение $a \cdot x = 0$ имеет один корень $x = 0$;
   3) если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение $0 \cdot x = b$ не имеет решений;
   4) если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $0 \cdot x = 0$ имеет бесконечно много корней, иначе $x \in \boldsymbol{R}$.



Укажите, при каких значениях параметра a уравнение не имеет корней (1—2).

1. $ax + 3 = 2x$
2. $(a^2 - 9)x = a^2 + a - 6$

Решение.

1. $ax + 3 = 2x \Leftrightarrow ax - 2x = -3 \Leftrightarrow x(a - 2) = -3$

Если $a = 2$, то $0 \cdot x = -3$ — не имеет корней

$x \cdot a = b$ не имеет корней, если $a = 0$, $b \neq 0$

Ответ: при $a = 2$ уравнение не имеет корней.

2. $(a^2-9)x = a^2+a-6$

$$\begin{cases} a^2-9=0 \\ a^2+a-6\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} a&=-3 \\ a&=3 \end{aligned}\right. \\ a\neq -3 \\ a\neq 2 \end{cases} \Rightarrow a=3$$

$x \cdot a = b$ не имеет корней, если $a=0$, $b\neq 0$

Ответ: при $a=3$ уравнение не имеет корней.

3. Укажите, при каких значениях параметра a уравнение $(a^2-1)x = 2a^2+a-3$ имеет бесконечно много решений.

Решение.

$(a^2-1)x = 2a^2+a-3$

$$\begin{cases} a^2-1=0 \\ 2a^2+a-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1;\ a=1 \\ a=-\dfrac{3}{2};\ a=1 \end{cases} \Rightarrow a=1$$

$x \cdot a = b$ имеет множество решений, если $a=0$, $b=0$

$$a_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1\pm 5}{4}$$

Ответ: при $a=1$ уравнение имеет множество корней.

4. ЭМ. Решите уравнение $\dfrac{a}{2a-x} = 3$.

Решение.

1) ОДЗ: $x\neq 2a$

2) $\dfrac{a}{2a-x} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

Дробь $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл, если $b\neq 0$

$$\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-6a+3x}{2a-x}=0 \Leftrightarrow \frac{3x-5a}{2a-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5a=0 \\ 2a-x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5a}{3} \\ x\neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5a}{3} \\ \dfrac{5a}{3}\neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5a}{3} \\ a\neq 0 \end{cases}$$

Ответ: при $a=0$ нет решений; при $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ $x=\dfrac{5a}{3}$.

Замечание. По условию имеем дробное уравнение, но оно приводится к линейному уравнению $3x-5a=0$.

5. ЭМ. Найдите все значения a, при которых число $x=2$ является корнем уравнения $|x+2a|\cdot x+1-a=0$.

Решение.

1) ОДЗ: $x\in R$; $a\in R$

2) Подставим $x=2$ в уравнение: $|2+2a|\cdot 2+1-a=0$

3) Решим уравнение с модулем: $|b|=\begin{cases} b, \text{ если } b\ge 0\\ -b, \text{ если } b<0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2+2a\ge 0\\ 4+4a+1-a=0\end{cases}\\ \begin{cases}2+2a<0\\ -4-4a+1-a=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge -1\\ 3a=-5\end{cases}\\ \begin{cases}a<-1\\ 5a=-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge -1\\ a=-\dfrac{5}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}a<-1\\ a=-\dfrac{3}{5}\end{cases}\end{array}\right.$$

Получившаяся система не имеет решений, следовательно, $x=2$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: при $a\in(-\infty;+\infty)$ число 2 не является корнем данного уравнения.

6. ЭМ. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x-2|-1=a-3x$.

Решение.

$|a|\Leftrightarrow\begin{cases} a, \text{ если } a\ge 0\\ -a, \text{ если } a<0\end{cases}$

1) ОДЗ: $x\in R$; $a\in R$

2) $|x-2|-1=a-3x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ x-2-1=a-3x\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ 2-x-1=a-3x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ 4x=a+3\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ 2x=a-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \ge 2 \\ x = \dfrac{a+3}{4} \end{cases} \atop \begin{cases} x < 2 \\ x = \dfrac{a-1}{2} \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \ge 2 \\ \dfrac{a+3}{4} \ge 2 \end{cases} \atop \begin{cases} x < 2 \\ \dfrac{a-1}{2} < 2 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \ge 2 \\ a \ge 5 \end{cases} \atop \begin{cases} x < 2 \\ a < 5 \end{cases}\right.$$

Для каждого значения $a \in (-\infty; +\infty)$ только одно из решений $x \ge 2$ или $x < 2$.

Алгоритм 88 Решение квадратного уравнения с параметром вида $ax^2 + bx + c = 0$

1. Найдите ОДЗ для переменной и параметра.
2. Выпишите, чему равны a, b, c: $a = ...$, $b = ...$, $c = ...$
3. Запишите за чертой формулу дискриминанта:

$D = b^2 - 4ac$, если b — нечетное, или $\dfrac{D}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac$, если b — четное

4. Составьте D (или $\dfrac{D}{4}$) по формуле п. 3.
5. Выберите один из трех случаев решения по требованию задачи:

I. Уравнение имеет два различных корня: $x_1 \ne x_2$

Решите систему $\begin{cases} D > 0 \\ a \ne 0 \end{cases}$

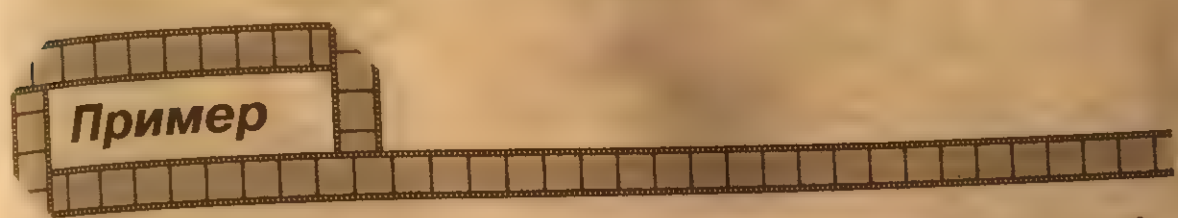
II. Уравнение имеет один корень: $x_1 = x_2$

Решите систему 1) $\begin{cases} D = 0 \\ a \ne 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a = 0 \\ b \ne 0 \end{cases}$

III. Уравнение не имеет корней среди R

Решите систему 1) $\begin{cases} D<0 \\ a\neq 0 \end{cases}$ 2) $a=b=0$

6. Запишите ответ.



При каком наименьшем целом значении m уравнение $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$ имеет два разных действительных корня?

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$; $m \in R$
2) $a = m-1$, $b = -2(m+1)$ — четное
$c = m-3$
3) $\frac{D}{4} = \left(-(m+1)\right)^2 - (m-1)(m-3) =$
$= m^2 + 2m + 1 - m^2 + 4m - 3 = 6m - 2$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

Чтобы $x_1 \neq x_2$, надо

$\begin{cases} D>0 \\ a\neq 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6m-2>0 \\ m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{3} \\ m\neq 1 \end{cases}$

Ответ: уравнение имеет два разных корня при наименьшем $m = 2$.

Примеры решения уравнений с параметром, предложенных на экзаменах

1. ЭМ. Найдите все значения a, при которых число $x_0 = 2$ является корнем уравнения $\left(a - 3x^2 - \cos\left(\frac{11\pi}{4}x\right)\right)\sqrt{8-ax} = 0$ (I).

Решение.

1) По условию $x=2$ — корень уравнения I, значит, при подстановке числа 2 в уравнение получим верное числовое равенство

$$\left(a-12-\cos\frac{11\pi}{2}\right)\sqrt{8-2a}=0 \text{ (II)}$$

2) Решим уравнение II относительно a:

$$(a-12-0)\sqrt{8-2a}=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a-12=0\\ \sqrt{8-2a}=0\end{array}\right.\\ a\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=12\\ a=4\end{array}\right.\\ a\le 4\end{cases}\Leftrightarrow a=4$$

$$\cos\frac{11\pi}{2}=\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$\sqrt{8-2a}$ имеет смысл, если $8-2a\ge 0\Leftrightarrow a\le 4$

$$b\cdot a=\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\\ \text{ОДЗ}\end{cases}$$

Ответ: при $a=4$ $x_0=2$ — корень уравнения.

2. ЭМ. Докажите, что уравнение $3^x+3^{-x}=ax^4+2x^2+2$ имеет нечетное число корней.

Решение.

Если уравнение имеет нечетное число корней, то графики функций $y=3^x+3^{-x}$ (I) и $y=ax^4+2x^2+2$ (II) имеют нечетное число точек пересечения.

1) Функция $y=3^x+3^{-x}$ четная: $y(-x)=3^{-x}+3^x=y(x)$

Функция $y=ax^4+2x^2+2$ четная:

$$y(-x)=a(-x)^4+2(-x)^2+2=ax^4+2x^2+2=y(x)$$

Графики четных функций симметричны относительно оси Oy.

2) Найдем значение $y(0)$:

$$y(0)=3^0+3^0=2$$

$$y(0)=a\cdot 0+2\cdot 0+2=2$$

точка (0; 2) общая и лежит на оси Oy

3) В силу четности функций графики пересекутся n раз при x из промежутка $(-\infty;\ 0)$ и n раз на промежутке $(0;\ +\infty)$, т. е. $2n$ раза плюс

общая точка (0; 2), значит, всего графики пересекутся нечетное число раз: $2n+1$.

4) Если слева и справа от 0 нет общих точек, то будет одна общая точка, т. е. при любом значении a уравнение имеет нечетное число корней.

3. ЭМ. При каких значениях a уравнение $\log_2(4^x+a^3)+x=0$ имеет два корня?

1) ОДЗ: $4^x+a^3>0$	$\log_2 f(x)$ имеет смысл, если $f(x)>0$
2) $\log_2(4^x+a^3)=-x$	$\log_2 f(x)(\uparrow)$ и $f(x)=4^x+a^3(\uparrow)$
Рассмотрим функции	основание логарифма (2) и основание
$y=\log_2(4^x+a^3)$ (I)	степени (4) больше 1
и $y=-x$ (II)	$y=-x(\downarrow)$ $(k<0)$

Решение.

Если одна функция возрастает, а другая убывает на ОДЗ, то уравнение имеет не более одного корня, значит, двух корней не может быть.

Ответ: ни при каком значении a уравнение не может иметь двух корней.

4. ЕГЭ. При каких значениях a выражение $1+\sin x(3\sin x+a\cos x)$ не равно 0 ни при каких значениях x?

Решение.

1) ОДЗ: $x\in\boldsymbol{R}$; $a\in\boldsymbol{R}$

2) Пусть выражение равно 0. Составим уравнение и определим, при каких значениях a уравнение не имеет решений.

$1+\sin x(3\sin x+a\cos x)=0$ | $1=\sin^2 x+\cos^2 x$

$1+3\sin^2 x+a\sin x\cos x=0$

$\sin^2 x+\cos^2 x+3\sin^2 x+a\sin x\cos x=0$

$4\sin^2 x+a\sin x\cos x+\cos^2 x=0$ $\quad |:\ \cos^2 x\neq 0$

$4\mathrm{tg}^2 x+a\,\mathrm{tg}\,x+1=0$ (I)

Пусть $\mathrm{tg}\,x=t$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$

$4t^2+at+1=0$ (II)

$D=b^2-4ac=a^2-16$

$D<0 \Rightarrow a^2-16<0$

$(a-4)(a+4)<0 \Rightarrow -4<a<4$

Уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, если $D<0$



При $-4<a<4$ уравнение (II) не имеет решений, а значит, и уравнение (I) не имеет решений, так как преобразования были равносильны.

Ответ: при $a \in (-4; 4)$ выражение не равно 0 ни при каких значениях x.

Попробуй не реши!

1. ЭМ. Решите уравнение $\frac{a}{a-2x}=3$.

2. ЭМ. Найдите все значения a, при которых число $x=-2$ является корнем уравнения $|x-a|\cdot x+1-2a=0$.

Ответ: 1. При $a=0$ решений нет, при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $x=\frac{a}{3}$.

2. $a=-\frac{3}{4}$.

Попробуй-ка реши!

1. При каких значениях p уравнение $p\cdot 2^x+2^{-x}=5$ имеет единственное решение?

2. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_3(9^x+9a^3)=x$ имеет ровно два корня.

Ответ: 1. $p=0$; $p=\frac{25}{4}$. 2. При $0<a<\sqrt[3]{\frac{1}{36}}$.

Глава IV
Решение систем уравнений

§ 1 Система линейных уравнений

Определение 1. *Системой* называется совокупность нескольких уравнений, в которых одноименные переменные обозначают одну и ту же величину.

Определение 2. Система двух уравнений 1-й степени с двумя переменными x и y называется *линейной*, если она преобразована к виду

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2}$ — числа

Например: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Определение 3. Каждая пара значений переменных $(x_0;\ y_0)$, которая одновременно удовлетворяет обоим уравнениям системы, называется *решением системы*.

Определение 4. Система, не имеющая решений, называется *несовместимой*.

Определение 5. *Решить систему* — это значит найти все решения системы или показать, что она не имеет их.

Определение 6. Две системы уравнений называются *равносильными*, если все решения одной из них являются решением другой и, на-

оборот, все решения второй системы являются решением первой системы.

Две несовместимые системы уравнений также считаются *равносильными.*

Равносильность систем помогает переходить от более сложной системы к более простой.

Теоремы о равносильности систем уравнений

Теорема 1. Любое из уравнений системы можно заменить равносильным ему уравнением, полученная при этом система равносильна данной.

Теорема 2. Любое из уравнений системы можно заменить уравнением, полученным в результате алгебраического сложения обоих уравнений системы, при этом новая система уравнений равносильна данной.

Теорема 3. Можно из одного уравнения системы выразить какую-нибудь переменную через другую и подставить это выражение во второе уравнение. Новое уравнение вместе с первым уравнением образует систему, равносильную данной.

Замечание. На указанных теоремах основаны разные способы решения систем уравнений.

В школьном курсе изучают системы уравнений следующих типов:

I. *Линейная система*, например: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

II. *Система уравнений 2-й степени*, например: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

III. *Иррациональная система*, например: $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ \sqrt{x^2 + 2}x + y = 12 \end{cases}$

IV. *Логарифмическая система*, например: $\begin{cases} x - y = 7 \\ \log_2(2x + y) = 3 \end{cases}$

V. *Показательная система*, например:

$$\begin{cases} 3x + 4y^2 = 8 \\ 8 \cdot 2^y = 4^{2x+2,5} \end{cases}$$

VI. *Тригонометрическая система*, например: $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \operatorname{tg}(x - y) = 1 \end{cases}$

Алгоритм 89 Исследование решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1. Составьте отношение коэффициентов и свободных членов ($a_{1,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2} \neq 0$):

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$$

2. Найдите числовые значения отношений и сравните их. Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет единственное решение $(x_0; y_0)$.

3. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений (и решать ее не надо).

4. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесчисленное множество решений, система равносильна одному уравнению (x_0 — любое число; $y_0 = \dfrac{c_1 - a_1x_0}{b_1}$).



Определите, при каком значении m система $\begin{cases} 2x + my = 6 \\ 3x + 6y = 8 \end{cases}$ не имеет решений.

Решение.

Составим пропорцию $\dfrac{2}{3} = \dfrac{m}{6}$ и найдем m:

$12 = 3m \Rightarrow m = 4$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} \neq \dfrac{6}{8} \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

при $m = 4$ система решений не имеет

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$

Нет решений, если

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

Ответ: при $m = 4$ нет решений.

Алгоритм 90. Решение системы линейных уравнений способом сложения

1. Проверьте, имеет ли система единственное решение:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

2. Уравняйте модули коэффициентов при одной переменной в обоих уравнениях (умножьте обе части уравнений на их дополнительные множители).
3. Сложите (или вычтите) уравнения почленно, чтобы осталась только одна переменная.
4. Решите линейное уравнение 1-й степени с одной переменной $\left(kx = b \Rightarrow x = \dfrac{b}{k}\right)$.

5. Подставьте корень из п. 4 в любое уравнение системы и найдите значение второй переменной.

6. Запишите ответ.



Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}y = 6 \\ 2x + \frac{3}{4}y = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 3 \\ x + \frac{y}{2} = 5 \end{cases}$

Решение.

1. Проверим наличие решения системы:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{3} : 2 = \frac{2}{3}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$; $\frac{c_1}{c_2} = \frac{6}{2} = 3$ | $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, значит, нет решений

Ответ: решений нет.

2. Проверим наличие решения системы: | $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$; $\frac{b_1}{b_2} = -1 : \frac{1}{2} = -2$; $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{5}$

$\frac{1}{2} \neq -2 \neq \frac{3}{5}$, значит, только одно решение

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 3 \\ x + \frac{y}{2} = 5 \quad \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

$$2\frac{1}{2}x = 13$$

$$\frac{5}{2}x = 13 \left| \cdot\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{26}{5}\right.$$

$$\frac{26}{5\cdot 2} - y = 3 \Rightarrow y = 2,6 - 3 \Rightarrow y = -0,4$$

Ответ: (5,2; −0,4).

Проверь себя!

Решите систему уравнений $\begin{cases} 7a - 15b = -129 \\ -3a - 11b = 3 \end{cases}$

Ответ: (−12; 3).

Алгоритм 91 Решение системы линейных уравнений способом подстановки

1. Приведите систему к линейной:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2. Проверьте наличие решения системы; если одно решение, то:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

3. Выразите из одного уравнения одну переменную через другую (желательно брать уравнение, где коэффициент при переменной равен 1).
4. Подставьте в другое уравнение вместо этой переменной ее выражение из п. 3.
5. Решите уравнение с одной переменной.
6. Подставьте найденный корень из п. 5 в выражение из п. 3 и найдите значение другой переменной.
7. Запишите ответ.



Пример

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2x-(x-y)}{6}=\dfrac{x+y}{5}-1 \\ \dfrac{y-2(x+y)}{8}=y-x \end{cases}$

Решение.

1) Приведем систему к линейной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-(x-y)}{6}=\dfrac{x+y}{5}-1 \quad \Big| \cdot 30 \\ \dfrac{y-2(x+y)}{8}=y-x \quad \Big| \cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2x-x+y)=6(x+y)-30 \\ y-2x-2y=8(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+y)-6(x+y)=-30 \\ 6x-9y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$$

2) Проверим наличие решения:

$$\frac{2}{1}\neq\frac{-3}{1}\neq\frac{0}{30}\Rightarrow \text{ — единственное решение } \Bigg| \ \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

3)—4) $\begin{cases} x=30-y \\ 2(30-y)-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30-y \\ 5y=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x=18 \end{cases}$

Ответ: (18; 12).

Проверь себя!

1. Найдите значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 6x+ay=10 \end{cases}$ имеет бесчисленное множество решений.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-y-6=0 \\ 2x-3y+3=0 \end{cases}$

Ответ: **1.** $a=-8$. **2.** (3; 3).

Алгоритм 92 Решение системы линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса

Система уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \text{ (I)} \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \text{ (II)} \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \text{ (III)} \end{cases}$$

называется линейной системой с тремя переменными.

1. Приведите каждое уравнение системы к виду $ax+by+cz=d$.
2. Решите систему уравнений I и II, исключив x (способом сложения), получите уравнение $b_4y+c_4z=d_4$ (IV).
3. Решите систему уравнений I и III, исключив x (способом сложения), получите уравнение $b_5y+c_5z=d_5$ (V).
4. Решите систему уравнений IV и V, исключив y, и найдите z: $z=d_6$.
5. Запишите систему

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \text{ (I)} \\ b_4y+c_4z=d_4 \text{ (IV)} \\ z_0=d_6 \end{cases}$$

6. Подставьте z_0 в уравнение IV или V и найдите y_0.
7. Подставьте z_0 и y_0 в уравнение I и найдите x_0.
8. Запишите ответ.

Замечание. Метод последовательного исключения переменной называется методом Гаусса и применим к линейным системам с n переменными. Порядок исключения переменной может быть любым, лишь бы уравнения IV и V содержали одни и те же переменные.



Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y-z=7 \ \text{(I)} \\ x+y-2z=2 \ \text{(II)} \\ x-y-3z=-2 \ \text{(III)} \end{cases}$$

Решение.

1) $$+\begin{cases} 2x-y-z=7 \ \text{(I)} \\ x+y-2z=2 \ \text{(II)} \end{cases}$$
$$3x-3z=9 \Rightarrow x-z=3 \ \text{(IV)}$$

2) $$-\begin{cases} 2x-y-z=7 \ \text{(I)} \\ x-y-3z=-2 \ \text{(III)} \end{cases}$$
$$x+2z=9 \ \text{(V)}$$

3) $$-\begin{cases} x-z=3 \ \text{(IV)} \\ x+2z=9 \ \text{(V)} \end{cases}$$
$$-3z=-6 \Rightarrow z=2$$

4) $$\begin{cases} z=2 \\ x-z=3 \\ 2x-y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2 \\ x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: (5; 1; 2).

Проверь себя!

Решите систему уравнений.

1. $$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+3z=7 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x-y+z=3 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$$

Ответ: 1. (1; 0; 2). 2. $\left(\frac{15}{7}; \frac{6}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

§ 2 Система уравнений 2-й степени

Алгоритм 93 Решение системы уравнений 2-й степени с двумя переменными

I тип систем

Одно уравнение 1-й степени, другое — 2-й степени
(решается способом подстановки)

1. Выразите одну переменную через другую из уравнения 1-й степени.
2. Подставьте найденное выражение в уравнение 2-й степени и приведите его к виду $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Решите квадратное уравнение.
4. Подставьте корни уравнения в выражение п. 1 и найдите вторую переменную.
5. Запишите ответ.



Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 5x^2+2y=1 \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 5x^2+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y=2x \\ 5x^2+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

Удобнее выразить y через x:

$y=\frac{2x}{3}$, так как y во втором уравнении в 1-й степени

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ 5x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 0 \quad | \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ 15x^2 + 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{3}{5} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$15x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 45}}{15} = \frac{-2 + 7}{15} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 7}{15} = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$b = 4$ — четное

$m = b : 2 = 2$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{9}\right); \left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Проверь себя!

Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ \frac{x}{3y} - \frac{2y}{x} = -\frac{23}{6} \end{cases}$

Ответ: $(1; 2)$; $\left(-4; \frac{1}{3}\right)$.

II тип систем

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} (1) \text{ или } \begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} (2)$$

1. Пусть x и y — корни уравнения $z^2 - az + b = 0$ (1) или $z^2 - az - b = 0$ (2) (по теореме, обратной теореме Виета).
2. Корни уравнения (1): $z_1 = x_1$, $z_2 = y_1$ или $z_1 = y_2$, $z_2 = x_2$.
   Корни уравнения (2): $z_1 = x_1$, $z_2 = -y_1$ или $z_1 = -y_2$, $z_2 = x_2$.

3. Запишите ответ.

Системы этого типа можно решать подстановкой.



Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ (1) 2. $\begin{cases} x-y=9 \\ xy=10 \end{cases}$ (2)

Решение.

1. $z^2-5z+6=0$

$z_1=3;\quad z_2=2$

$x_1=3;\quad y_1=2$

$x_2=2;\quad y_2=3$

Ответ: (3; 2); (2; 3).

Решение.

2. $z^2-9z-10=0$

$z_1=10;\quad z_2=-1$

$x_1=10;\quad y_1=1$

$x_2=-1;\quad y_2=-10$

Ответ: (10; 1); (–1; –10).

III тип систем

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x\pm y=b \end{cases}$$

1. Поделите левые и правые части уравнений, получите $x\mp y=\frac{a}{b}$. Разложите на множители $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, вместо $x\pm y$ подставьте число b.

2. Решите линейную систему $\begin{cases} x \mp y = \dfrac{a}{b} \\ x \pm y = b \end{cases}$ и найдите $(x_0; y_0)$.

3. Запишите ответ.



Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$2x = 14$$

$$x^2 - y^2 = \underbrace{(x - y)}_{1}(x + y) = 1 \cdot (x + y)$$

$$x + y = 13;\ x \neq y$$

Ответ: (7; 6).

IV тип систем

Оба уравнения системы 2-й степени

I *способ: подстановки*



Решите систему уравнений $\begin{cases} y + 5 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

<u>*Решение.*</u>

$$\begin{cases} y+5=x^2 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y+5 \\ y+5+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4 \\ x^2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5 \\ x^2=0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \end{array} \right. \text{ или } \begin{cases} x=0 \\ y=-5 \end{cases}$$

$$y^2+y-20=0$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=-1 \\ y_1\cdot y_2=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=-5 \end{array} \right.$$

Ответ: (3; 4); (–3; 4); (0; –5).

II *способ: сложение*



Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40 \\ 2x^2+y^2+3x=52 \end{cases}$

<u>*Решение.*</u>

$$-\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40 \\ 2x^2+y^2+3x=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+12=0 \\ 3x^2+y^2-4x=40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2-7x=-12$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ 3\cdot 9+y^2-12=40 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ 3\cdot 16+y^2-16=40 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y^2=8 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}\\\begin{cases}x=3\\y=-5\end{cases}\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=2\sqrt{2}\end{cases}\\\begin{cases}x=4\\y=-2\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (3; 5); (3; –5); (4; $2\sqrt{2}$); (4; $-2\sqrt{2}$).

Проверь себя!

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases}x^2+x+y=6\\x-y=-3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y=10\\xy=16\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-y=15\\xy=16\end{cases}$

Ответ: 1. (–3; 0); (1; 4). 2. (2; 8); (8; 2). 3. (16; 1); (–1; –16).

V тип систем

Решение систем 2-й степени введением новой переменной

1. Обозначьте выражение, которое повторяется в одном из уравнений, новой переменной.
2. Решите уравнение относительно новой переменной.
3. Подставьте полученные корни в выражение из п. 1 и выразите одну переменную через другую, а затем подставьте полученное выражение во второе уравнение.
4. Решите уравнение с одной переменной.
5. Подставьте корни п. 4 в п. 3 и найдите вторую переменную.
6. Запишите ответ.



Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2) Обозначим $\dfrac{x}{y} = t$, тогда $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{t}$, получим уравнение:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \quad \Big| \cdot 2t \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$t_1 = 2, \ t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \ D = 9 + 16 = 25$$

$$t_1 = \frac{3+5}{4} = 2, \ t_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

3) Решим два уравнения:

I. $\dfrac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$

$$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ x = -4 \end{cases} \end{array} \right.$$

II. $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -2x$

$$\begin{cases} y = -2x \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right. \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: (4; 2); (–4; –2); (2; –4); (–2; 4).

VI тип систем

Приведение уравнений 2-й степени к однородному уравнению

1. Если каждое уравнение содержит в левой части все члены 2-й степени, а правая часть — число, то уравняйте правые части и из уравнения I вычтите почленно уравнение II, чтобы справа был 0.
2. Получите однородное уравнение $ax^2+bxy+cy^2=0$ (III). Разделите обе части уравнения III на $y^2 \neq 0$, получите уравнение:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)+c=0$$

3. Введите замену $\frac{x}{y}=t$ и решите квадратное уравнение:

$$at^2+bt+c=0, \text{ пусть } t_1 \text{ и } t_2 \text{ — корни}$$

4. Выразите $x = yt_1$, $x = yt_2$, подставьте в любое из уравнений (I, II) и найдите y.
5. Подставьте y в выражение $x=yt$ и найдите x.
6. Запишите ответ.



Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ -y^2-xy+2x^2=5 \end{cases}$

Решение.

1) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ -y^2-xy+2x^2=5 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 5 \\ \cdot(-3) \end{vmatrix} \Leftrightarrow +\begin{cases} 5x^2-5xy+5y^2=15 \\ -6x^2+3xy+3y^2=-15 \end{cases}$

$$-x^2-2xy+8y^2=0 \;\Big|\; :(-y^2)$$

$$2)\ \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y}-8=0\\&x^2-xy+y^2=3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&t=\frac{x}{y}\\&t^2+2t-8=0\\&x^2-xy+y^2=3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&x=2y\\&x=-4y\end{aligned}\right.\\&x^2-xy+y^2=3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x=-4y\\&x^2-xy+y^2=3\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&x=2y\\&x^2-xy+y^2=3\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x=-4y\\&(-4y)^2+4y^2+y^2=3\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&x=2y\\&4y^2-2y^2+y^2=3\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x=-4y\\&21y^2=3\quad|:3\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&x=2y\\&3y^2=3\quad|:3\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x=-4y\\&7y^2=1\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&x=2y\\&y^2=1\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&y_1=-\frac{1}{\sqrt7}\\&x_1=\frac{4}{\sqrt7}\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&y_2=\frac{1}{\sqrt7}\\&x_2=-\frac{4}{\sqrt7}\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\ \text{или}\ \left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&y_3=-1\\&x_3=-2\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&y_4=1\\&x_4=2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

$$\frac{x}{y}=t\Rightarrow t^2+2t-8=0$$

$$\left\{\begin{aligned}&t_1+t_2=-2\\&t_1\cdot t_2=-8\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t=-4\\&t=2\end{aligned}\right.$$

$$\frac{x}{y}=-4\Rightarrow x=-4y$$

$$(-4y)^2+4y^2+y^2=3$$

$$y^2=\frac{1}{7}\Rightarrow y_1=-\frac{1}{\sqrt7}$$

$$y_2=\frac{1}{\sqrt7}$$

$$\frac{x}{y}=2,\ x=2y$$

$$4y^2-2y^2+y^2=3$$

$$y^2=1\Rightarrow y_1=1$$

$$y_2=-1$$

Ответ: $\left(\frac{4}{\sqrt7};\ -\frac{1}{\sqrt7}\right);\ \left(-\frac{4}{\sqrt7};\ \frac{1}{\sqrt7}\right);\ (-2;\ -1);\ (2;\ 1).$

Нетиповые системы уравнений



Решите систему уравнений.

1. ЭМ. $\begin{cases} 2x-2y=3xy \\ 4x^2+4y^2=5x^2y^2 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 2x-2y=3xy & \text{(I)} \\ 4x^2+4y^2=5x^2y^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Возведите в квадрат обе части уравнения I:

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$-\begin{cases} 4x^2-8xy+4y^2=9x^2y^2 \\ 4x^2+4y^2=5x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-8xy=4x^2y^2$$

$-8xy=4x^2y^2$

$4x^2y^2+8xy=0 \Rightarrow 4xy(xy+2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=3xy \\ 4xy(xy+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ xy=-2 \end{array}\right. \\ 2x-2y=3xy \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-2 \\ 2x-2y=-6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=y \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-2 \\ x-y=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y-3 \\ (y-3)y=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=y-3 \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-3 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$y^2-3y+2=0$

$\begin{cases} y_1+y_2=3 \\ y_1 \cdot y_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Ответ: (0; 0); (−1; 2); (−2; 1).

2. $\begin{cases} xy^2 - x = 9 \\ xy - xy^3 = -18 \end{cases}$

<u>*Решение.*</u>

$\begin{cases} xy^2 - x = 9 \\ xy - xy^3 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y^2 - 1) = 9 \\ xy(1 - y^2) = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x(y^2 - 1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Поделите почленно левые и правые части уравнений:

$\frac{xy(1-y^2)}{x(y^2-1)} = \frac{-18}{9} \Rightarrow -y = -2 \Rightarrow y = 2$

Ответ: (3; 2).

Полезный совет. Упростите уравнение, затем выберите тип системы и решайте по алгоритму (если возможно).

Проверь себя!

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + 2xy + y = 10 \\ x - 2xy + y = -2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1 \\ 3xy + 7y^2 = 1 \end{cases}$

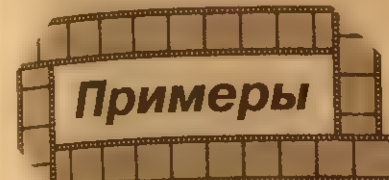
Ответ: 1. (±3; ±2); (±2; ±3). 2. (3; 1); (1; 3). 3. $\left(\pm\frac{1}{2};\ \mp\frac{1}{2}\right)$; (±2; ∓1).

§ 3 Система иррациональных уравнений

Алгоритм 94 Решение системы иррациональных уравнений

1. Запишите за чертой условие равносильности уравнений и решите систему неравенств.

2. Возведите в квадрат обе части иррационального уравнения системы.
3. Решите систему и найдите $(x_0; y_0)$.
4. Согласуйте решения с условием п. 1 (или сделайте проверку решений).
5. Запишите ответ.



1. ЭМ. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$

Решение.

1) Условие равносильности:

$$\begin{cases}x+y-1\ge 0\\ x-y+2\ge 0\\ 2y-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1-y\\ x\ge y-2\\ y\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 1\\ x\ge -\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad +\begin{array}{l}x\ge 1-y\\ x\ge y-2\\ \hline 2x\ge -1\end{array}$$

2) Возведем в квадрат обе части уравнений и вычтем почленно:

$$-\begin{cases}x+y-1=1\\ x-y+2=4(y-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ 4y^2-6y=0\end{cases}$$

$$2y-3=1-4(y-1)^2$$

$2y-3=1-4y^2+8y-4$

$4y^2-6y=0\Leftrightarrow 2y(2y-3)=0$

$y=0;\ 0\notin[1;+\infty)$

$y=\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\in[1;+\infty)$

3) $\begin{cases}x+y=2\\ y=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}\\ x+\dfrac{3}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Пара чисел $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$ удовлетворяет условию п. 1.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

2. ЕГЭ. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} y=\sqrt{2-x} \\ y+\sqrt{(x-3)^2}=3. \end{cases}$

Найдите отношение $\dfrac{x_0}{y_0}$.

Решение.

1) ОДЗ: $x_0 \in (-\infty; 2]$
$y_0 \in [0; 2]$

2) $\begin{cases} y=\sqrt{2-x} \\ y+\sqrt{(x-3)^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=2-x \\ y+|x-3|=3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} x<3;\ x\le 2 \text{ (ОДЗ)} \\ y^2+x-2=0 \\ y-x+3-3=0 \end{cases}$$

$$y^2+y-2=0$$

3) $\begin{cases} y^2+y-2=0 \\ x=y \\ x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \\ x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \end{cases}$$

4) $x_0 : y_0 = 1$

$\sqrt{f(x)}$ имеет смысл, если $f(x)\ge 0$, значит,

$\begin{cases} 2-x\ge 0 \\ (x-3)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\le 2$

$y=\sqrt{f(x)}$

$y=\sqrt{f(x)}\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 0$

$|x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ при } x\ge 3 \\ \text{(не может быть по ОДЗ)} \\ 3-x \text{ при } x<3 \end{cases}$

$y^2+y-2=0$

$\begin{cases} y_1+y_2=-1 \\ y_1\cdot y_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=1 \end{array}\right.$

$y_1\ne -2$, так как $y\ge 0$

$y=\sqrt{2-x}$

$1=\sqrt{2-x}$

$x=1$

Ответ: $\dfrac{x_0}{y_0}=1$.

З а м е ч а н и е. Если решаете систему, не находя ОДЗ или условие равносильности, то надо проверить все пары решений.

Проверь себя!

ЕГЭ. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-8x+16}-1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$. Найдите разность x_0-y_0.

Ответ: $x_0-y_0=-1$.

§ 4 Системы показательных и логарифмических уравнений

Алгоритм 95 Решение систем показательных и логарифмических уравнений

1. Найдите ОДЗ (решите систему неравенств из ОДЗ каждого выражения).
2. Освободитесь от знака логарифма по свойству монотонности:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Rightarrow f(x)=g(x)>0$$

3. Решите систему уравнений (без знака логарифма).
4. Согласуйте решения с ОДЗ (или сделайте проверку без ОДЗ).
5. Запишите ответ.



1. **ЭМ.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x-y=7 \\ \log_2(2x+y)=3 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x-y=7 \\ \log_2(2x+y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-7 \\ \log_2(2x+x-7)=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-7 \\ 3x-7=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-7 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

По определению логарифма

$\log_a b = n$, $a^n = b$

Проверка: $\begin{cases} 5-(-2)=7 \\ \log_2(10-2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7=7 \\ \log_2 8=3 \end{cases}$ — истина

Ответ: (5; –2).

З а м е ч а н и е. Решение системы дано без нахождения ОДЗ, но с проверкой.

2. ЭМ. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 8\cdot 2^y = 4^{2x+2,5} \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 2^{3+y}=2^{4x+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=8 \\ 3+y=4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=8 \\ 4x-y=-2 \quad \mid \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} 3x+4y=8 \\ 16x-4y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$19x=0$$

ОДЗ: $x \in R$; $y \in R$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$

(свойство монотонности)

$4^{2x+2,5} = (2^2)^{2x+2,5} = 2^{4x+5}$

Ответ: (0; 2).

3. ЭМ. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-y=\log_2 \dfrac{y}{x} \\ x^2+y=12 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x-y=\log_2\dfrac{y}{x} \\ x^2+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-y}=\dfrac{y}{x} \\ y=12-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^x}{2^y}=\dfrac{y}{x} \\ y=12-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=12-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=3 \end{array}\right. \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

Решения входят в ОДЗ

ОДЗ:

$\dfrac{y}{x}>0 \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ x>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y<0 \\ x<0 \end{cases}$

$\log_a b=n \Rightarrow a^n=b$

$a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$

$\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{m}{n}$ возможно

только при условии $\dfrac{m}{n}=1$,

тогда $m=n$ или

$a^m=a^n \Rightarrow m=n$

$x^2+x-12=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1\cdot x_2=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ответ: (–4; –4); (3; 3).

4. ЭМ. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_y x=2 \\ x^{\lg y}=100 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \log_y x=2 \\ x^{\lg y}=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ x^{\lg y}=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ \left(y^2\right)^{\lg y}=100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ \left(y^{\lg y}\right)^2=10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ y^{\lg y}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ \lg y^{\lg y}=\lg 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ \lg^2 y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ \left[\begin{array}{l} \lg y=1 \\ \lg y=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ \left[\begin{array}{l} y=10 \\ y=0{,}1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=10 \\ x=100 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0{,}1 \\ x=0{,}01 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решения входят в ОДЗ

ОДЗ:

$\log_a b$ имеет смысл,

если $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$

$\begin{cases} y>0 \\ y\neq 1 \\ x>0 \end{cases}$

$(a^m)^n=(a^n)^m$

$\sqrt{100}=10$

Прологарифмируйте

по основанию 10:

$y^{\lg y}=10$

$\lg a^n=n\lg a$

Ответ: (100; 10); (0,01; 0,1).

Проверь себя!

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} y-x=7 \\ 3^x \cdot 3^{2(y-1)}=27 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y-2x=2 \\ \log_5(y-x)=\log_5(x+2) \end{cases}$

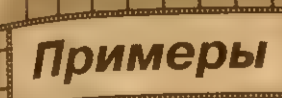
Ответ: 1. $(-3; 4)$. 2. $(x_0; 2x_0+2)$ при $x>-2$ и $y>x$.

§ 5 Системы тригонометрических уравнений

Алгоритм 96 Решение систем тригонометрических уравнений

1. Найдите ОДЗ.
2. Выразите один угол через другой из уравнения, содержащего только углы. Если оба уравнения содержат тригонометрические функции, то перейдите к п. 3.
3. Решите каждое уравнение системы относительно его аргументов (углов).
4. Составьте систему из полученных углов и найдите x_0 и y_0.
5. Согласуйте решения $(x_0; y_0)$ с ОДЗ.
6. Запишите ответ.

З а м е ч а н и е. Если система приведена к системе, состоящей из простейших уравнений, то при решении каждого уравнения следует использовать свой параметр — n или k.



1. ЭМ. Дана функция $f(x)=2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x$. Найдите все решения системы $\begin{cases} f(x)=0 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=0 \end{cases}$, такие, что $0\le x\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

Вместо x подставьте $\dfrac{\pi}{2}-y$ в уравнение.

$$\begin{cases} 2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0 \\ 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)-\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

ОДЗ: по условию $0\le x\le y\le\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sin x(2\sin x-\sqrt{3})=0 \\ 2\cos^2 y-\sqrt{3}\cos y=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$a\cdot b=0\Rightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sin x(2\sin x-\sqrt{3})=0 \\ \cos y(2\cos y-\sqrt{3})=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$2\cos^2 y-\sqrt{3}\cos y=\cos y(2\cos y-\sqrt{3})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos y=0 \\ \cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\pi}{2} \\ y=\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow$$

$2\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2\cos y-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3} \\ y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3} \\ y=\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

$x\le y$ по условию

$\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ не является решением на ОДЗ, так как $x > y$

Ответ: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right); \left(0; \frac{\pi}{6}\right); \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. ЭМ. Дана функция $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x$.

Решите систему уравнений $\begin{cases} y - x = 3\pi \\ f(x) + f(y) = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 3\pi + x \\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2(3\pi + x) - \operatorname{tg}(3\pi + x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\pi + x \\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\pi + x \\ 2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 4 = 0 \quad \Big| :2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\pi + x \\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\pi + x \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 2 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x,\ k \in Z$

$\operatorname{tg} f(x)$ имеет смысл при $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{tg} x = t$

$t^2 - t - 2 = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 \cdot t_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

<u>*Решение.*</u>

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\pi + x \\ \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \\ y = 2\frac{3}{4}\pi + \pi k \end{cases}$$

или $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z \\ y = 3\pi + \operatorname{arctg} 2 + \pi n \end{cases}$ решения входят в ОДЗ

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{11}{4}\pi + \pi k\right),\ k \in Z;$

$(\operatorname{arctg} 2 + \pi n; 3\pi + \operatorname{arctg} 2 + \pi n),\ n \in Z.$

Проверь себя!

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+\cos x=3y+\cos y \\ 3x-y=6 \end{cases}$

Ответ: (3; 3).

Алгоритм 97 Графическое решение системы уравнений

1. Решите каждое уравнение относительно y.
2. Постройте график каждой функции $y=f(x)$.
3. Найдите координаты всех точек пересечения графиков (опустите перпендикуляры на оси Ox и Oy из точек пересечения).
4. Запишите ответ.

З а м е ч а н и е. Графически обычно решают системы, которые нельзя решить элементарным путем, но графически можно решать и все остальные системы. Недостаток этого способа заключается в том, что часто ответы получаются в приближенных числах.



Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} x^2-y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^x-y+1=0 \\ xy=2 \end{cases}$

<u>*Решение.*</u>

1. 1) $\begin{cases} x^2-y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-3 \text{ — парабола} \\ y=2x \text{ — прямая через } O(0;\ 0) \end{cases}$

2) Построим графики (рис. 120).

$y = x^2 - 3$: (0; −3) — вершина параболы

$y = 2x$: (2; 4) и (0; 0) — две точки

3) Общие точки A и B: $A(3; 6)$; $B(-1; -2)$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Ответ: (3; 6); (−1; −2).

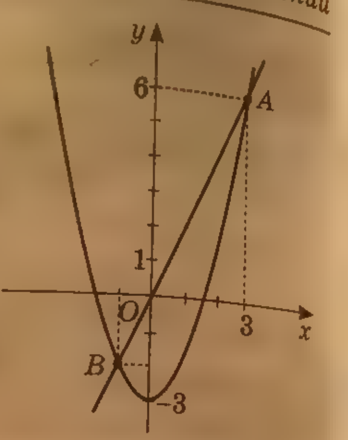


Рис. 120

2. 1) $\begin{cases} 2^x - y + 1 = 0 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x + 1 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$ ОДЗ: $x \neq 0$; $y > 1$, так как $2^x > 0$

2) Построим графики (рис. 121).

$y = 2^x + 1$

x	−1	0	1
y	$1\frac{1}{2}$	2	3

$y = \dfrac{2}{x}$

x	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	−2	−4	4	2	1

$x_0 \approx 0,7$

$y_0 \approx 2,8$

Рис. 121

Ответ: ($\approx 0,7$; $\approx 2,8$).

Замечание. Можно построить график функции $y = 2^x$ и сделать сдвиг оси Ox на 1 вниз.

Проверь себя!

Решите графически систему уравнений.

1. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y=\log_2(x-1) \\ y=2^{x-3} \end{cases}$

Ответ: **1. (1; –1). 2. (3; 1).**

Попробуй не реши!

Решите систему уравнений.

1. ЭМ. $\begin{cases} 27^x=9^y \\ 81^x=3^{y+1} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y=7 \\ \log_2(2x+y)=3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=\dfrac{1}{9} \\ y-x=2 \end{cases}$

Ответ: **1. (0,4; 0,6). 2. (5; –2). 3. (–2; 0).**

Попробуй-ка реши!

1. ЭМ. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x}{y} \\ x=y^2-6 \end{cases}$

2. ЭМ. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2} \\ x+y+xy=9 \end{cases}$

3. ЭМ. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}=6 \\ \log_4 x+\log_4 y=-3 \end{cases}$

4. ЕГЭ. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} y-1=\sqrt{4x^2-12x+9} \\ 3x-y=5 \end{cases}$. Найдите сумму x_0+y_0.

Ответ: **1. (–2; –2); (3; 3). 2.** $\left(-9; -\dfrac{9}{4}\right)$; **(4; 1). 3.** $\left(\dfrac{1}{16}; \dfrac{1}{4}\right)$; $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{16}\right)$.

4. $x_0+y_0=7$.

ЧАСТЬ II



Глава I
ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1 Тригонометрические функции

Определение синуса, косинуса и тангенса в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC:

a, b, c — длины сторон треугольника

α — величина угла A (рис. 1)

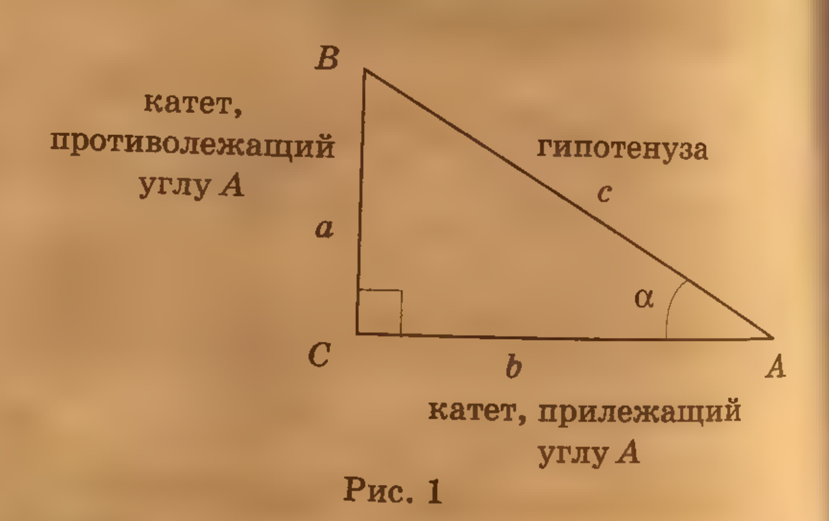


Рис. 1

Составим отношения сторон треугольника ABC: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$. Получим шесть чисел, значения которых зависят от величины угла α и имеют соответствующие названия: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\mathrm{cosec}\,\alpha$ и $\sec\alpha$.

Определение 1. *Синусом* угла α в прямоугольном треугольнике называется число, равное отношению длины противолежащего катета к длине гипотенузы:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ — число; } a < c \Rightarrow \sin\alpha < 1$$

Например: $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\sin\alpha = 0{,}6273$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Определение 2. *Косинусом* угла α в прямоугольном треугольнике называется число, равное отношению длины прилежащего катета к длине гипотенузы:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ — число; } b < c \Rightarrow \cos\alpha < 1$$

Например: $\cos\alpha = 0{,}3$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = 0{,}5126$

Определение 3. *Тангенсом* угла α в прямоугольном треугольнике называется число, равное отношению длины противолежащего катета к длине прилежащего катета:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \ \operatorname{tg}\alpha \text{ — любое положительное число } (R^+)$$

Например: $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3146$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

В школьном курсе обычно изучают $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$. Остальные три отношения длин сторон есть числа, обратные числам $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, и рассматриваются реже. Дадим их определения.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}; \ \operatorname{ctg}\alpha \text{ — любое положительное число } (R^+); \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} \text{ число больше 1; } c > a \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha > 1; \ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \text{ число больше 1; } c > b \Rightarrow \sec\alpha > 1; \ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Например: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}3165$; $\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}3$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec\alpha = 2{,}5$; $\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Решение прямоугольного треугольника



Нахождение сторон и углов в прямоугольном треугольнике

Для решения прямоугольного треугольника (нахождения всех сторон и двух углов) достаточно знать два элемента треугольника ($\angle C = 90°$ — всегда известен): либо две стороны, либо сторону и угол.

I случай. Даны две стороны.

① Найдите по теореме Пифагора или следствию из нее третью сторону:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},\ b = \sqrt{c^2 - a^2},\ a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

② Составьте для нахождения угла α одно из отношений: $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ или $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ (то, которое легче вычислить) — и по таблице В. М. Брадиса или с помощью калькулятора найдите угол α.

③ Вычислите угол β по формуле $\beta = 90° - \alpha$.

④ Запишите ответ.

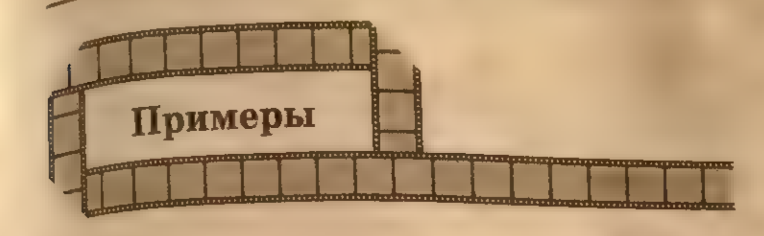
II случай. Даны сторона и угол.

① Составьте отношения, содержащие данную и искомую стороны и данный угол: $\frac{a}{c} = \sin \alpha$; $\frac{b}{c} = \cos \alpha$; $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$.

② Найдите нужную сторону: $a = c \cdot \sin \alpha$; $b = c \cdot \cos \alpha$; $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$; $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ или $c = \frac{b}{\cos \alpha}$ (гипотенузу находите делением!).

③ Вычислите угол β по формуле $\beta = 90° - \alpha$.

④ Запишите ответ.



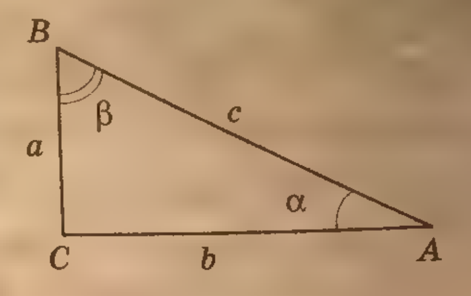


Рис. 2

1. *Дано:* $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $a = 10$ м, $\alpha = 35°$ (рис. 2).
Найти: c и β.

Решение.

1) $c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{10}{\sin 35°} \approx \dfrac{10}{0{,}5736} \approx 17{,}4$

2) $\beta = 90° - 35° = 55°$

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{1}$

$\sin 35° \approx 0{,}5736$

Ответ: $c \approx 17{,}4$ м, $\beta = 55°$.

2. *Дано:* $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $c = 6$ м, $\alpha = 60°$ (рис. 2).
Найти: a и β.

Решение.

1) $a = c \cdot \sin\alpha = 6 \cdot \sin 60° = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

2) $\beta = 90° - 60° = 30°$

$a = c\sin\alpha$

$\alpha + \beta = 90°$

Ответ: $a = 3\sqrt{3}$ м, $\beta = 30°$.

3. *Дано:* $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, a, b (рис. 2).
Найти: c, α, β.

Решение.

1) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

2) $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, α — по таблице В. М. Брадиса

3) $\beta = 90° - \alpha$

Замечание. При нахождении элементов треугольника лучше использовать заданные величины, а не найденные при решении.

Проверь себя!

В прямоугольном треугольнике гипотенуза c равна 15 м и угол β равен 75°. Найдите катеты и угол α.

Ответ: $a \approx 3{,}9$ м, $b \approx 14{,}5$ м, $\alpha = 15°$.

Изображение углов поворота и чисел на окружности

Возьмем окружность радиуса R с центром в начале координат. Центральный угол P_0OM (рис. 3) получен поворотом радиуса OP_0 относительно точки O. Сторону OP_0 на оси Ox примем за начальную сторону угла. Конец радиуса — точка M изображает на окружности угол поворота точки P_0 относительно точки O. Каждому центральному углу P_0OM соответствует на окружности единственная точка M.

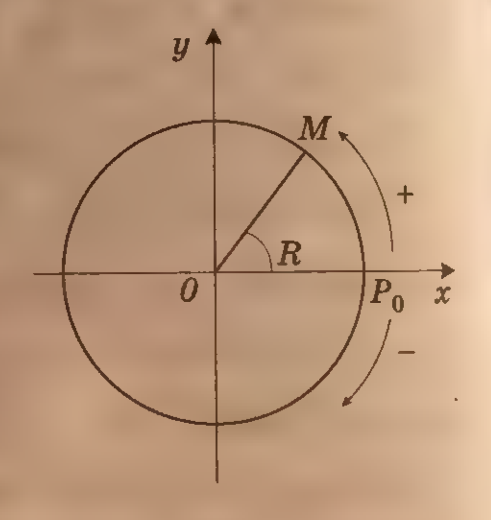


Рис. 3

Направление поворота против часовой стрелки примем за положительное (↶), а направление поворота по часовой стрелке — за отрицательное (↷) (рис. 3).

Величина угла поворота α не зависит от длины R, поэтому удобно рассматривать центральные углы как углы поворота точки P_0 на окружности с $R = 1$. Окружность с $R = 1$ называют *единичной*.

Рассмотрим в системе координат xOy единичную окружность (рис. 4). Проведем числовую ось, сонаправленную с осью Oy, через точку $P_0(1; 0)$ и выберем на этой оси единицу длины, равную радиусу ($R = 1$).

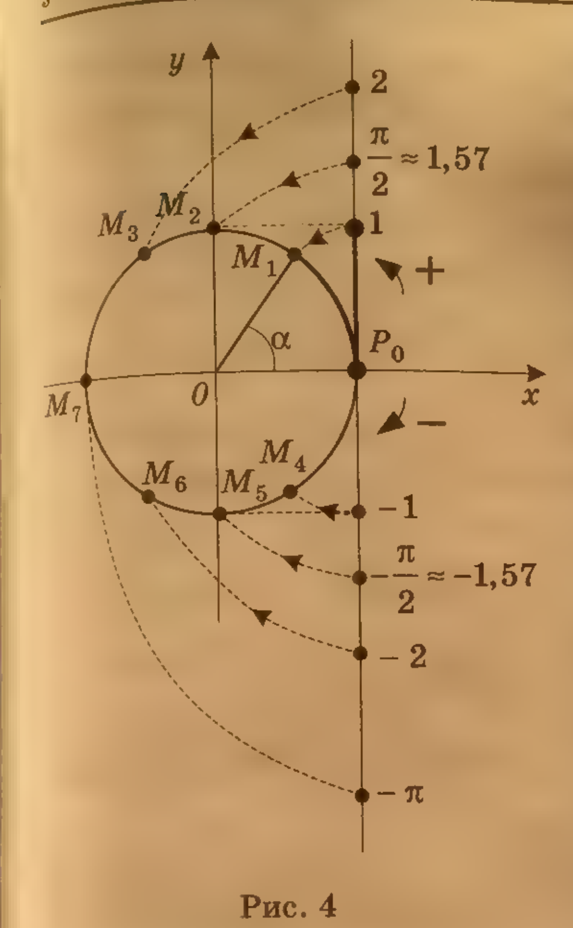


Рис. 4

Считая ось нерастяжимой, мысленно намотаем ее на окружность: положительное направление оси против часовой стрелки, отрицательное — по часовой стрелке (см. рис. 4). Тогда точки оси с координатами $1, \frac{\pi}{2}, 2, \dots$ и $-1, -\frac{\pi}{2}, -2, -\pi, \dots$ перейдут в точки окружности $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, \dots$.

Таким образом, все точки оси с их координатами (числами) перейдут в точки окружности, причем в каждую точку окружности попадет множество чисел оси, отличающихся друг от друга на n полных поворотов. Получим окружность, на которой можно изобразить точкой любое действительное число.

Пусть центральный угол P_0OM опирается на дугу P_0M, длина которой равна $R = 1$ (рис. 5). Примем этот угол за единицу измерения углов и назовем его *радианом*.

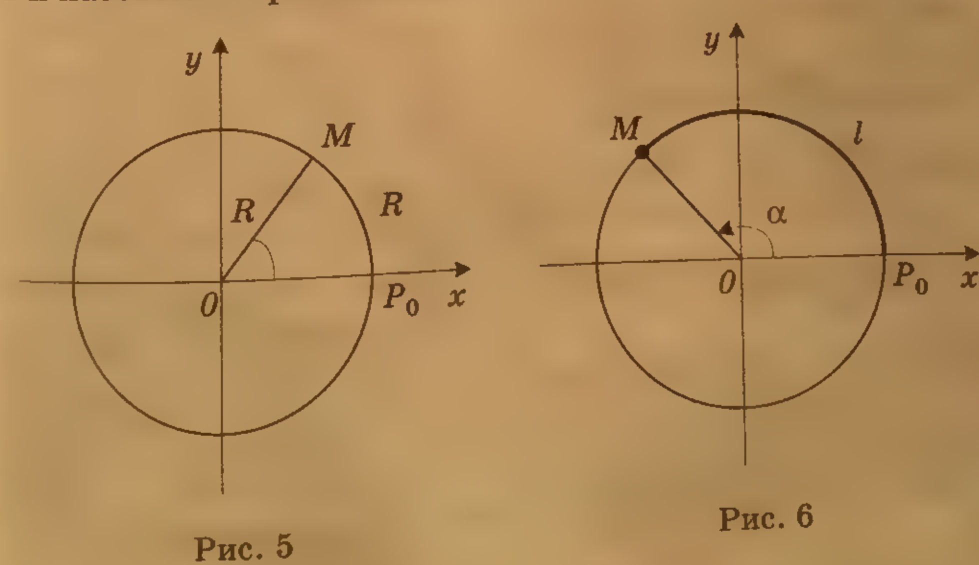


Рис. 5

Рис. 6

Если точка M пройдет по окружности путь, равный 20 радиусам, то угол поворота равен 20 радианам, если путь точки M равен 3 радиусам, то угол поворота равен 3 радианам и т. д.

Если длина дуги окружности равна l, а радиус R, то число α радианов, содержащихся в соответствующем угле, будет равно отношению $\frac{l}{R}$ (рис. 6). Если $l = 2\pi R$, то $\alpha_{\text{рад}} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$, $l = R \cdot a$ (в радианах); $R = 1$, то $l = \alpha$ — длина дуги равна величине центрального угла в радианах. Угол 360° содержит 2π радианов, угол 180° содержит π радианов.

$$1 \text{ радиан} = 180°: \pi \approx 57°17'45''$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453 \text{ рад}$$

Внимание! Нельзя говорить и писать, что π равно 180°, надо писать π рад = 180°, $\frac{\pi}{6} \neq 30°$, $\frac{\pi}{6}$ рад = 30° и т. д.

Итак, длина окружности равна 2π радиан, или $\approx 6{,}28$. Число 2π на окружности изобразится точкой $P_{2\pi}(1; 0)$.

Длина полуокружности равна π радиан, или $\approx 3{,}14$. Число π изобразится точкой $P_{\pi}(-1; 0)$ на окружности (рис. 7).

Число $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ изобразится точкой $P_{\frac{\pi}{2}}(0;1)$. Число $-\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$ изобразится точкой $P_{-\frac{\pi}{2}}(0;-1)$. Этой же точкой изобразится число $\frac{3}{2}\pi \approx 4{,}71$.

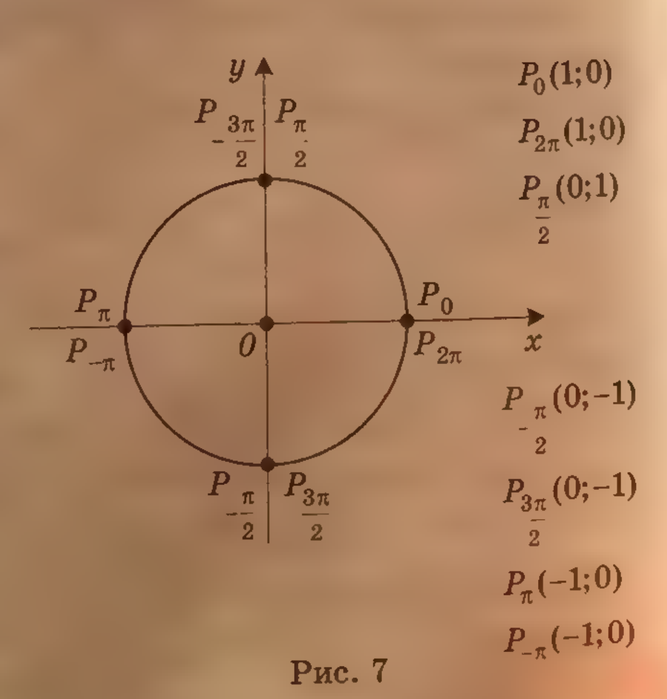


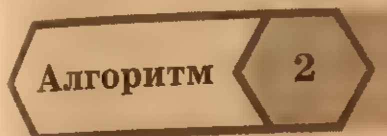
Рис. 7

Полезно знать основные «вехи», т. е. числа на единичной окружности, чтобы ориентироваться в изображении других чисел.

Замечание. Наименование «радиан» при записи чисел опускают, если эти числа не связаны с градусами равенством.

Вывод. 1. Углы поворота измеряются радианами — действительными числами, поэтому мы может говорить об углах как о числах и изображать их на окружности точками, соответствующими этим числам.

2. Каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности; обратное утверждение неверно — в каждую точку окружности попадает множество чисел, отличающихся на целое число полных поворотов.



Изображение углов (чисел) на единичной окружности

① Изобразите единичную окружность в системе координат xOy $(R = 1)$ и нанесите на ней «вехи» (рис. 8) — точки, изображающие числа

$0;\ \pm\frac{\pi}{2} \approx \pm 1{,}57;\ \pm\pi \approx \pm 3{,}14;\ \frac{3}{2}\pi \approx 4{,}71;\ 2\pi \approx 6{,}28.$

② Если модуль данного числа α меньше $2\pi \approx 6{,}28$, то изобразите его (приблизительно) точкой P_α в соответствующей четверти.

Например: а) число 5 изобразим точкой P_5 в IV четверти, так как $4{,}71 < 5 < 6{,}28$; б) число -2 изобразим точкой P_{-2} в III четверти, так как $-3{,}14 < -2 < -1{,}57$.

③ Если модуль данного числа α больше $2\pi \approx 6{,}28$, то:

1) найдите n $(n \in \mathbf{Z})$ — число полных поворотов, разделив α на 2π;

2) запишите α в виде $\alpha = 2\pi \cdot n + t$, где $|t| < 2\pi$;

3) найдите число t — остаток от деления α на 2π: $t \approx \alpha - 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$;

4) изобразите число t на окружности (п. 2) точкой $P_{t + 2\pi n}$ — это и будет изображение числа α или угла поворота точки $P_0\,(1;\,0)$ на α радиан на единичной окружности.



Изобразите на единичной окружности числа:

1. $\alpha = 21$. 2. $\alpha = -17$. 3. $\alpha = \frac{15}{2}\pi$.

Решение.

1) Изобразим единичную окружность.

2) Оценим модуль числа α.

Рис. 8

1. $\alpha = 21$, $|21| > 6{,}28$. | 2. $\alpha = -17$, $|-17| > 6{,}28$.

3) Найдем n ($n = \pm1; \pm2; \ldots$) и запишем α.

$L = 21$
$n = 21 : 6{,}28$
$n \approx 3, \ldots$
$\alpha = 2\pi \cdot 3 + t$
$t \approx 21 - 6{,}28 \cdot 3 = 2{,}16$,
т. е. $t \approx 2{,}16$
Число $\alpha = 21$ изобразится точкой $P_{\approx 2{,}16 + 2\pi \cdot 3}$ во II четверти ($1{,}57 < 2{,}16 < 3{,}14$) (рис. 8)

$L = -17$
$n = -17 : 6{,}28$
$n \approx -2, \ldots$
$\alpha = 2\pi \cdot (-2) + t$
$t \approx -17 - 6{,}28 \cdot (-2) =$
$= -17 + 12{,}56 = -4{,}44$,
т. е. $t \approx -4{,}44$
Число $\alpha = -17$ изобразится точкой $P_{\approx -4{,}44 - 4\pi}$ во II четверти ($-4{,}71 < -4{,}44 < -3{,}14$) (рис. 8)

$n = \alpha : 2\pi$
$\alpha = 2\pi \cdot n + t$
$t = \alpha - 2\pi n$

3. 1) $\left|\frac{15}{2}\pi\right| > 2\pi$

2) $n = 7{,}5\pi : 2\pi = 3, \ldots$

3) $7{,}5\pi - 6\pi = 1{,}5\pi$ — это точка $P_{\frac{3}{2}\pi}(0; -1)$

Проверь себя!

В какой четверти лежит точка P_{-30} на единичной окружности?
Ответ: P_{-30} лежит в I четверти.

Формулы перевода градусной меры угла в радианную и наоборот

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha_{рад}}{\pi_{рад}}$$

$$\alpha_{рад} = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}$$

$$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha_{рад}}{\pi_{рад}}$$

Внимание!
$\pi \neq 180^\circ$
$\pi \approx 3{,}14$
$\pi_{рад} = 180^\circ$

Например: убедимся, что: а) $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ рад; б) $\frac{3\pi}{8}$ рад $= 67^\circ 30'$.

а) $\alpha_{рад} = \frac{\pi \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$ рад $\Rightarrow 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ рад

б) $n^\circ = \frac{180^\circ \cdot 3\pi}{\pi \cdot 8} = 67^\circ 30'$

$$\alpha_{рад} = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}$$

$$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha_{рад}}{\pi_{рад}}$$

Значения некоторых углов в радианах легко запомнить.
Например: найдем в радианах 30°:

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ рад},$$

тогда

$$15^\circ = 30^\circ : 2 = \frac{\pi}{6} \text{ рад} : 2 = \frac{\pi}{12} \text{ рад}$$

$$45^\circ = 15^\circ \cdot 3 = \frac{\pi \cdot 3}{12} \text{ рад} = \frac{\pi}{4} \text{ рад}$$

$$60^\circ = 30^\circ \cdot 2 = \frac{\pi}{6} \text{ рад} \cdot 2 = \frac{\pi}{3} \text{ рад}$$

$$90^\circ = 45^\circ \cdot 2 = \frac{\pi}{4} \cdot 2 \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад, или } 90^\circ = 30^\circ \cdot 3 = \frac{\pi}{6} \text{ рад} \cdot 3 = \frac{\pi}{2} \text{ рад}$$

Полезно записать эти данные в таблицу и выучить.

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Градусы	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	360°
Радианы	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

Определение тригонометрических функций углов

Углы поворота на единичной окружности изображаются точками. Каждая точка в системе координат имеет абсциссу и ординату, которые и приняты за косинус и синус угла α (рис. 9).

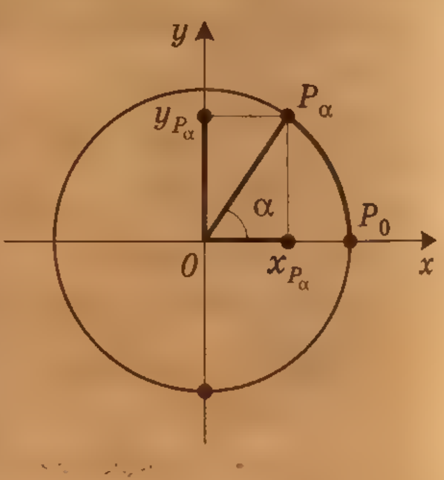


Рис. 9

Определение 1. *Синусом* угла α называется (число) ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α:

$$y_{P_\alpha} = \sin\alpha, \ \alpha \in \boldsymbol{R}$$

Определение 2. *Косинусом* угла α называется (число) абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α:

$$x_{P_\alpha} = \cos\alpha, \ \alpha \in \boldsymbol{R}$$

Определение 3. *Тангенсом* угла α называется число, равное отношению ординаты точки P_α к ее абсциссе или отношению синуса угла α к косинусу этого же угла:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_{P_\alpha}}{x_{P_\alpha}}, \text{ или } \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\text{причем } x_{P_\alpha}\neq 0 \Rightarrow \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

$$\frac{x_{P_\alpha}}{y_{P_\alpha}}=\operatorname{ctg}\alpha, \text{ или } \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ y_{P_\alpha}\neq 0\Rightarrow\alpha\neq\pi k,\ k\in Z$$

Если каждому действительному числу x поставить в соответствие число $\sin x$ или $\cos x$, то на множестве действительных чисел зададим функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$. Аналогично $y=\operatorname{tg} x$, если $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, и $y=\operatorname{ctg} x$, если $x\neq\pi k$, $k\in Z$.

Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$ и $y=\operatorname{cosec} x$ называются *тригонометрическими*.

$$\frac{1}{x_{P_\alpha}}=\sec\alpha, \text{ или } \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \text{ (секанс)},\ x_{P_\alpha}\neq 0$$

$$\frac{1}{y_{P_\alpha}}=\operatorname{cosec}\alpha, \text{ или } \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \text{ (косеканс)},\ y_{P_\alpha}\neq 0$$

Внимание! Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$ и $y=\operatorname{cosec} x$ есть функции **числа x**.

Изображение значений синуса, косинуса и тангенса

Из определения синуса угла α: $\sin\alpha=y_{P_\alpha}$ (ордината точки P_α) — следует, что значения синусов расположены в промежутке $[-1;\ 1]$ на оси Oy (рис. 10, *а*).

Из определения косинуса угла α: $\cos\alpha=x_{P_\alpha}$ (абсцисса точки P_α) — следует, что значения косинусов расположены в промежутке $[-1;\ 1]$ на оси Ox (рис. 10, *б*).

Значения $\operatorname{tg}\alpha$ изображаются точкой на оси тангенсов — прямой, сонаправленной с осью Oy и проходящей через точку $P_0(1;0)$, $-\infty<\operatorname{tg}\alpha<+\infty$ (рис. 11, *а*).

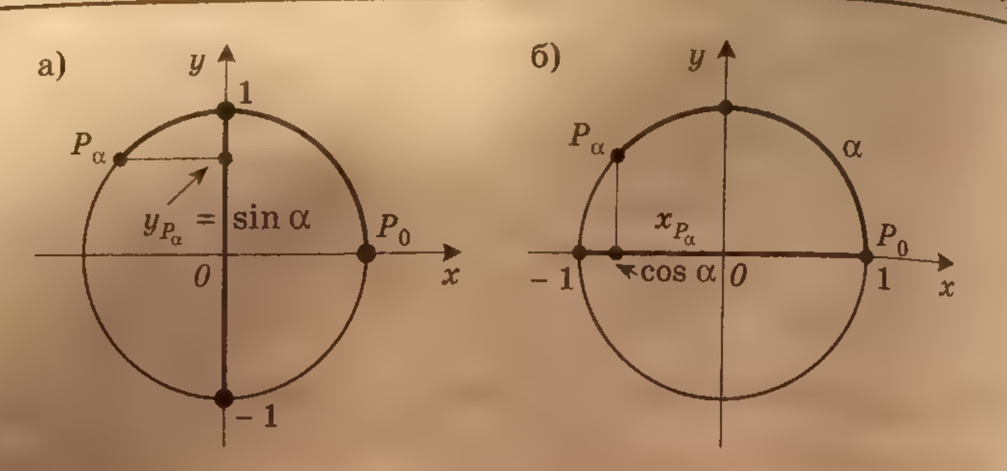


Рис. 10

Значения $\operatorname{ctg}\alpha$ изображаются точкой на оси котангенсов — прямой, сонаправленной с осью Ox и проходящей через точку $P(0;1)$, $-\infty < \operatorname{ctg}\alpha < +\infty$ (рис. 11, *б*).

З а м е ч а н и е. Интересно, что значения $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ находятся соответственно на осях Ox и Oy, вне окружности, их значения по модулю больше или равны 1 (рис. 12).

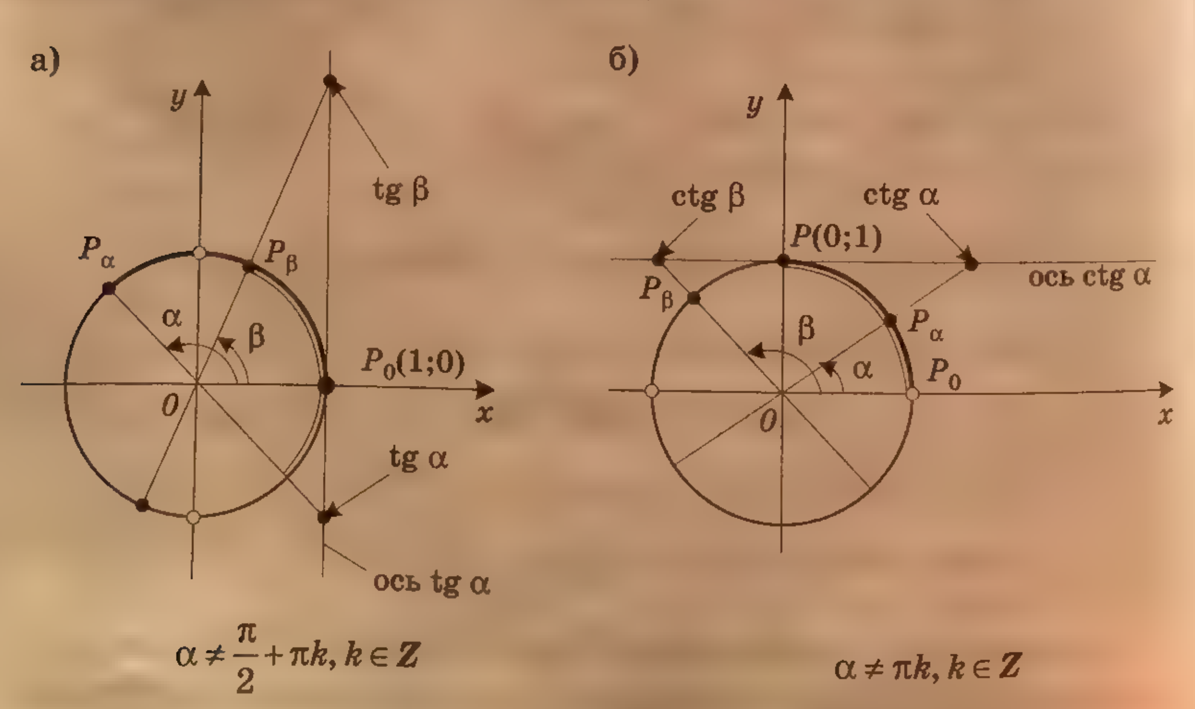
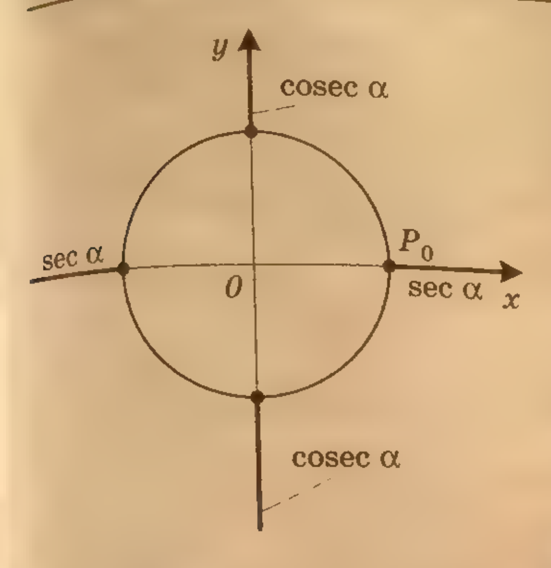


Рис. 11



$\alpha \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$ – для cosec α

$\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ — для sec α

Рис. 12

Запомните!

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ и $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, $-\infty < \operatorname{tg}\alpha < +\infty$, $-\infty < \operatorname{ctg}\alpha < +\infty$.

Наибольшее значение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равно +1, наименьшее равно −1; tg α и ctg α не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значений на их области определения.



1. ЭМ. Решите уравнение

$$\sin x = 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

Решение.

Правая часть уравнения $1 + \dfrac{1}{x^2+1} > 1$ $\left(\dfrac{1}{x^2+1} > 0\right)$.

Левая часть уравнения $|\sin x| \leq 1$. Значит, уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

2. ЭМ. Решите неравенство $\cos x \geq 1 + 2^x$.

Решение.

Наибольшее значение косинуса равно 1, но $2^x > 0$ при любом значении x, а значит, $\cos x > 1$, что невозможно. Поэтому неравенство не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Значения тригонометрических функций некоторых углов запишем в таблицу.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Определение знаков синуса, косинуса и тангенса

По определению синуса, косинуса и тангенса угла (числа) α их знаки есть знаки абсциссы и ординаты точки P_α либо знак их отношения. Поэтому, для того чтобы определить знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, достаточно определить знаки чисел x_{P_α} и y_{P_α}.

Удобно иметь схему знаков функций на окружности (рис. 13), для этого условно обозначим:

$y_{P_\alpha} = \sin\alpha$ через s ($y_{P_\alpha} > 0$ в I и II четвертях);

$x_{P_\alpha} = \cos\alpha$ через c ($x_{P_\alpha} > 0$ в I и IV четвертях);

$\frac{y_{P_\alpha}}{x_{P_\alpha}} = \operatorname{tg}\alpha$ через t $\left(\frac{y_{P_\alpha}}{x_{P_\alpha}} > 0 \text{ в I и III четвертях}\right)$.

Знаки $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ совпадают.

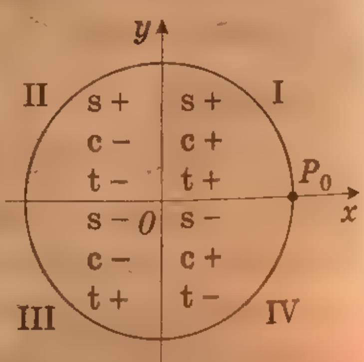
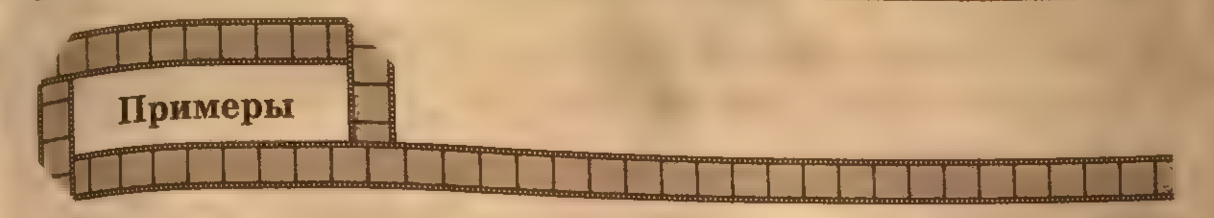


Рис. 13



1. Определите знаки тригонометрических функций числа $\frac{7}{8}\pi$.

Решение.

Точка $P_{\frac{7}{8}\pi}$ лежит во II четверти, значит,	$\frac{7}{8}\pi < \frac{8}{8}\pi = \pi$
$y_{P_\alpha} > 0,\ x_{P_\alpha} < 0$ и $y_{P_\alpha} : x_{P_\alpha} < 0$, а значит,	$\operatorname{tg}\alpha < 0$
$\sin\frac{7}{8}\pi > 0,\ \cos\frac{7}{8}\pi < 0,\ \operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi < 0,\ \operatorname{ctg}\frac{7}{8}\pi < 0.$	$\operatorname{ctg}\alpha < 0$ во II четверти

2. Сравните числа sin 3 и cos 4.

Решение.

P_3 лежит во II четверти, значит, $\sin 3 > 0$;	$\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$
P_4 лежит в III четверти, значит, $\cos 4 < 0$.	$\pi < 4 < \frac{3}{2}\pi$
Следовательно, $\sin 3 > \cos 4$.	

Четность, нечетность тригонометрических функций

С помощью свойств четности, нечетности тригонометрические функции отрицательных углов можно приводить у функциям положительных углов. Все тригонометрические функции имеют симметричную область определения относительно 0, поэтому при определении их четности, нечетности следим только за изменением знака в зависимости от знака α.

$$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{cosec}(-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha \end{aligned}\right\}\text{ нечетные}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \sec(-\alpha) &= \sec\alpha \end{aligned}\right\}\text{ четные}$$

З а м е ч а н и е. По свойству четности, нечетности знак «–» перед углом α у четных функций можно опускать, а у нечетных функций выносить за знак функции.

Например:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
2) $\cos(-\pi)=\cos\pi=-1$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
3) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
4) $\operatorname{ctg}(-60°)=-\operatorname{ctg}60°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$

В н и м а н и е! $-\cos(-\alpha)\neq\cos\alpha$, а $-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$ (знак у косинуса можно опустить только перед углом).



Упростите выражение $(1+\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$.

Решение.

1) $(1+\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{ctg}(-\alpha))=(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha)=$
$=1-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-1=-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$

2) $\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

3) $-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-(-\operatorname{tg}\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Проверь себя!

Упростите.

1. $\sin(-2x) - \cos(-2x) + \operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{ctg}(-x) - 1$
2. $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Ответ: **1.** $-\sin 2x - \cos 2x$. **2.** $\frac{1}{2}$.

Периодичность тригонометрических функций

По определению периодичности функции $f(x)$

$$f(x_0 \pm T) = f(x_0), \quad x_0 \in D(f), \quad T > 0$$

Для тригонометрических функций имеем

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha\end{array}\right\}$$

$T = 2\pi$ — наименьший период;
числа вида $2\pi k$ $(k \in Z)$ — периоды.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha\end{array}\right\}$$

$T = \pi$ — наименьший период;
числа вида πk $(k \in Z)$ — периоды.



Приведите функции данных углов к функциям углов $0 \le \alpha \le \pi$, или $0° \le \alpha \le 180°$.

1. $\sin\frac{19}{4}\pi$. **2.** $\cos 13\frac{1}{3}\pi$. **3.** $\operatorname{tg} 9\frac{1}{4}\pi$. **4.** $\sin 1375°$.

Решение.

Обозначим данный угол буквой β, а искомый угол буквой t, тогда $t = \beta - Tk$, $k = \pm1$; ±2; ..., $T = 2\pi$ или $T = \pi$.

1. $\sin\frac{19}{4}\pi = \sin\left(4\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$t = \beta - 2\pi k$, $k \in Z$ $\beta = \frac{19}{4}\pi = 4\frac{3}{4}\pi$ $t = 4\frac{3}{4}\pi - 4\pi = \frac{3}{4}\pi$ $(k = 2)$
2. $\cos 13\frac{1}{3}\pi = \cos\left(14\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$	$t = 13\frac{1}{3}\pi - 14\pi = -\frac{2}{3}\pi$ $(k = 7)$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
3. $\mathrm{tg}\, 9\frac{1}{4}\pi = \mathrm{tg}\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$	$t = 9\frac{1}{4}\pi - 9\pi = \frac{\pi}{4}$ $(k = 9)$
4. $\sin 1375° = \sin(360° \cdot 4 - 65°) = \sin(-65°) = -\sin 65°$	$t = 1375° - 360° \cdot 4 = -65°$ $(k = 4)$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Ответ: **1.** $\sin\frac{3}{4}\pi$. **2.** $\cos\frac{2}{3}\pi$. **3.** $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$. **4.** $-\sin 65°$.



С помощью свойства периодичности тригонометрической функции стремимся привести угол к наименьшему по модулю углу t, лежащему в I или II четверти, применяя формулу $t = \beta - Tk$, $k = \pm1$; ±2; ..., $T = \pi$ или $T = 2\pi$, $t < T$.

Периоды тригонометрических функций углов вида ωx, где $\omega > 0$

1. Если надо найти период функции $y = \sin \omega x$ или $y = \cos \omega x$, то примените формулу $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega > 0$.

Например, найдем наименьший период функции:

$$\text{а) } y = \sin 4x; \text{ б) } y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

а) $\omega = 4$, тогда $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

б) $\omega = \frac{1}{3}$, тогда $T = 2\pi : \frac{1}{3} = 6\pi$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

2. Если надо найти период функции $y = \operatorname{tg} \omega x$ или $y = \operatorname{ctg} \omega x$, то примените формулу $T = \frac{\pi}{\omega}$, $\omega > 0$.

Например, найдем наименьший период функции:

$$\text{а) } y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \text{ б) } y = \operatorname{ctg} 2x$$

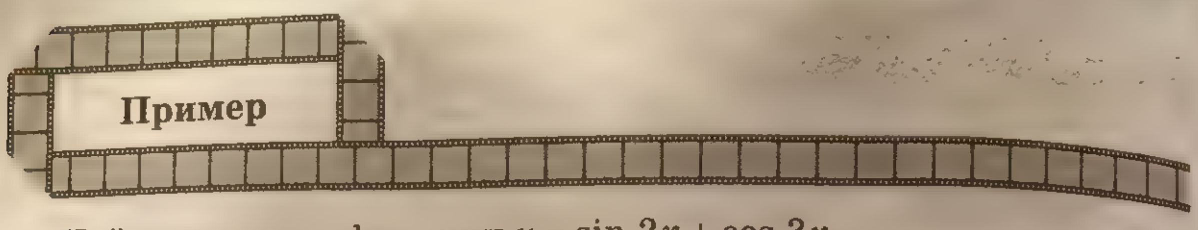
а) $\omega = \frac{1}{2}$, тогда $T = \pi : \frac{1}{2} = 2\pi$

б) $\omega = 2$, тогда $T = \pi : 2 = \frac{\pi}{2}$

$T = \frac{\pi}{\omega}$

Полезный совет

Если функция состоит из суммы функций с разными периодами, то ее периодом T будет наименьшее положительное число, при делении которого на периоды каждой функции получаются натуральные числа $(\text{НОК}(T_1; T_2))$.



Найдите период функции $y = \sin 2x + \cos 3x$.

Решение.

1) Найдем периоды каждой функции:

$$y_1 = \sin 2x;\ \omega = 2,\ T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y_2 = \cos 3x;\ \omega = 3,\ T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2) Найдем T для функции

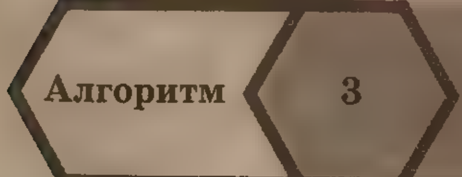
$$y = \sin 2x + \cos 3x:$$

$T = 2\pi$, так как $2\pi : \pi = 2$ и $2\pi : \frac{2\pi}{3} = 3$

$$\text{НОК}\left(\pi; \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi;$$

(находим НОК T_1 и T_2)

Ответ: $T = 2\pi$.



Найдите период функции.

1. $y = \sin 2x + \cos x$. **2.** $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

Ответ: **1.** $T = 2\pi$. **2.** $T = 2\pi$.

Алгоритм 3 **Приведение функций произвольных углов к функциям углов из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (Формулы приведения)**

① Если угол больше 2π (360°), то отнимите от данного угла $T \cdot k$, где T — наименьший период, $k = \pm 1; \pm 2; \ldots$ ($T = \pi$ для $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$; $T = 2\pi$ для $y = \sin x$ и $y = \cos x$).

(2) Если угол отрицательный, то приведите данную функцию к функции положительного угла (по свойству четности, нечетности).

(3) Определите четверть, в которой находится полученный угол. Запишите угол в виде:

I четверть: α или $\frac{\pi}{2}-\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

II четверть: $\pi-\alpha$ или $\frac{\pi}{2}+\alpha$

III четверть: $\pi+\alpha$ или $\frac{3}{2}\pi-\alpha$

IV четверть: $2\pi-\alpha$, или $-\alpha$, или $\frac{3}{2}\pi+\alpha$

(4) Определите знак функции (в зависимости от четверти).

(5) Определите название функции в ответе:

1) Если угол записан в виде $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$, то название функции меняется на кофункцию (sin на cos, cos на sin, tg на ctg и т. д.).

Например: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\,\alpha$.

2) Если угол записан в виде $\pi\pm\alpha$ или $2\pi-\alpha$, то название функции сохраняется.

Например: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

Полезный совет

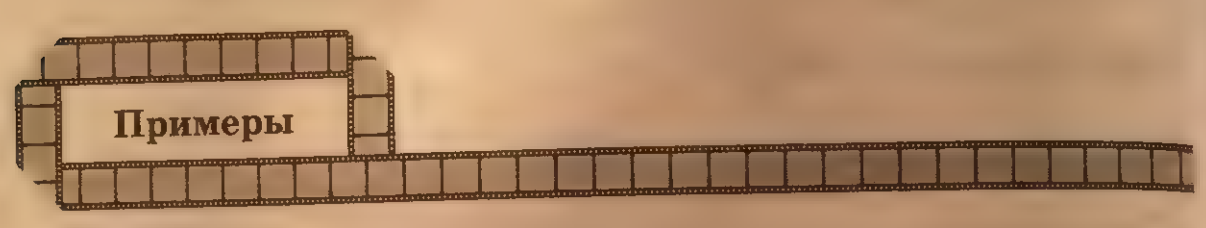
Для определения названия функции (п. 5) удобно пользоваться мнемоническим правилом:

если угол записан в виде $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ (значения $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ находятся в точках окружности на оси Oy), то на мысленный вопрос,

меняется ли название функции, голова, двигаясь вдоль оси Oy вверх и вниз (↕), как бы отвечает «да, меняется»;

если же угол записан в виде $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$ (числа π и 2π находятся в точках окружности на оси Ox), то на вопрос, меняется ли название функции, голова как бы будет отвечать (↔) «нет».

Этот прием математики шутливо называют «лошадиным правилом» или «правилом головы».



Вычислите: 1. $\cos\frac{3}{4}\pi$. 2. $\sin\frac{5}{4}\pi$.

Решение.

1. 1) Определим четверть:

$\frac{\pi}{2} < \frac{3}{4}\pi < \pi \Rightarrow P_{\frac{3}{4}\pi}$ во II четверти

2) Определим знак $\cos\frac{3}{4}\pi$: $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

3) Определим название функции:

$\overset{-}{\cos}\left(\underset{\leftrightarrow}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3}{4}\pi = \pi - \frac{\pi}{4}$

$x_{P_\alpha} < 0$

Точка P_π на оси Ox

Название не меняется: (↔) «нет»

Посмотрим, как кратко будет выглядеть применение алгоритма:

$\overset{-}{\cos}\left(\overset{\text{II}}{\underset{\leftrightarrow}{\pi} - \frac{\pi}{4}}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}$. (Представьте угол $\frac{3}{4}\pi = \pi - \frac{\pi}{4}$, поставьте над углом четверть, над названием cos знак «–», под углом π стрелку (↔) «нет» и запишите ответ с учетом знака над косинусом.)

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin\frac{5}{4}\pi = \overset{-}{\sin}\left(\overset{\text{III}}{\underset{\leftrightarrow}{\pi}+\frac{\pi}{4}}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overset{-}{\sin}(\overset{\text{III}}{\pi+\alpha}) = -\sin\alpha$

$\alpha = \frac{5}{4}\pi - \pi = \frac{\pi}{4}$

(четверть III; знак «−»; название не меняется: ($\leftrightarrow$) нет)

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упростите: 3. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$. 4. $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$.

Решение.

3. $\overset{+}{\cos}\left(\updownarrow\overset{\text{IV}}{\frac{3}{2}\pi+\alpha}\right) = \sin\alpha$ (четверть IV; знак «+»; название меняется: ($\updownarrow$) «да»).

Ответ: $\sin\alpha$.

4. $\overset{+}{\mathrm{tg}}\left(\updownarrow\overset{\text{III}}{\frac{3}{2}\pi-\alpha}\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha$ (четверть III; знак «+»; название ($\updownarrow$) меняется: «да»).

Ответ: $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Удобно пользоваться схемой единичной окружности с подписанными «вехами»: $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$; 2π (рис. 14).

Рис. 14

5. Выразите $\cos\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{5}{14}\pi$ через синус.

Решение.

$\cos\frac{\pi}{9} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right) = \sin\frac{7\pi}{18}$

$\cos\frac{5}{14}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{14}\pi\right) = \sin\frac{\pi}{7}$

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

6. ЕГЭ. Вычислите $\sin(-330°)$.

Решение.

$\sin(-330°) = \sin(-330° + 360°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ | $\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

7. ЕГЭ. Упростите выражение $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$.

Решение.

$\cos^2(\underset{\leftrightarrow}{\pi} - \alpha) + \cos^2\left(\updownarrow \frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Ответ: 1.

Полезный совет

Если рассматривается тригонометрическая функция в четной степени, то знак перед функцией сохраняется и определяется только название (по «правилу головы»).

8. Дана функция $f(x) = (\operatorname{tg} x + 1)(2\cos x - 1)$. Сравните числа $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ и $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение.

1) $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi + 1\right)\left(2\cos\frac{3}{4}\pi - 1\right) =$

$= (-1+1)\left(2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right) = 0$

$\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi = \overset{-}{\operatorname{tg}}\left(\overset{\text{II}}{\underset{\leftrightarrow}{\pi}} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\cos\frac{3}{4}\pi = \overset{-}{\cos}\left(\overset{\text{II}}{\underset{\leftrightarrow}{\pi}} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\left(tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1\right)\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-1\right)=$

$=(-\sqrt{3}+1)\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)=0$

$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

3) $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$

Ответ: $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Проверь себя!

1. Упростите выражение $\sin(\pi-3x)\cdot\cos x+\cos 3x\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)$.

2. Дана функция $f(x)=\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x$. Пусть $f\left(\frac{\pi}{5}\right)=a$. Выразите через a значение $f\left(\frac{4}{5}\pi\right)$.

3. Вычислите: $\operatorname{tg} 1800°-\sin 495°+\cos 945°$.

Ответ: 1. $\sin 3x\ \cos x-\cos 3x\ \sin x$. 2. $-a$. 3. $-\sqrt{2}$.

Алгоритм 4 Нахождение значений тригонометрических функций угла через значение данной функции

I способ: с помощью тождеств

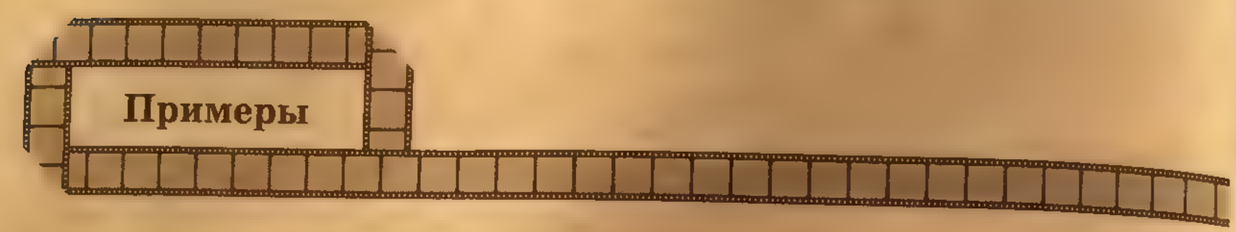
① Запишите условие: «дано» и «найти».

② Запишите за чертой тождество, в которое входит данная функция и искомая или промежуточная функция, через которую можно найти искомую функцию.

③ а) Если искомая функция входит в тождество, то выразите ее из этого тождества и вычислите значение с учетом четверти.

б) Если искомая функция находится через промежуточную функцию, то сначала найдите эту вспомогательную функцию, вычислите ее значение, а затем найдите искомую функцию и ее значение.

(4) Запишите ответ.



Примеры

1. Найдите $\sin x$, если $\cos x = -\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Дано:

$\cos x = -\frac{3}{5}$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Найти: $\sin x$

Решение:

$$\sin x = +\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

$\sin x > 0$ (II ч.)

Ответ: $\sin x = \frac{4}{5}$.

2. ЕГЭ. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Дано:

$\cos\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$,

$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Найти: $\operatorname{tg}\alpha$

Решение:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 1} = -\sqrt{\frac{4\cdot 7}{9} - 1} = -\sqrt{\frac{28-9}{9}} = -\frac{\sqrt{19}}{3}$$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$

$\operatorname{tg}\alpha < 0$ (II ч.)

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{19}}{3}$.

Замечание. Если затрудняетесь считать по формуле $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, то найдите $\sin\alpha$ (см. пример 1), а затем найдите $tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

II способ: по правилу треугольника

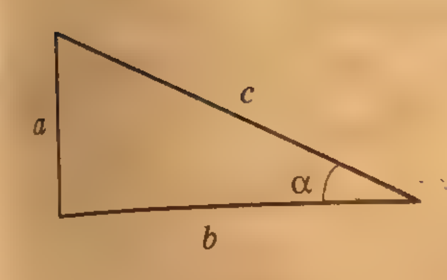


Рис. 15

① Запишите условие: «дано» и «найти».

② Изобразите прямоугольный треугольник и подпишите на рисунке его стороны и угол α (рис. 15).

③ Запишите данную функцию одним из отношений:

$$|\sin\alpha|=\frac{a}{c};\ |\cos\alpha|=\frac{b}{c};\ |tg\,\alpha|=\frac{a}{b};\ |ctg\,\alpha|=\frac{b}{a}$$

④ Приравняйте искомое отношение к заданному числу и определите две стороны треугольника (каждое из отношений — несократимая дробь).

⑤ Найдите третью сторону, либо по теореме Пифагора или следствию из нее, либо через решение прямоугольного треугольника (алгоритм 1), и подпишите значения сторон на рисунке.

⑥ Составьте искомое отношение сторон (см. п. 3).

⑦ Определите знак функции с учетом заданной четверти.

⑧ Запишите ответ.

Замечания. 1. Решая пример данным способом, используют только определения тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике и знак функции с учетом четверти.

2. В данном случае нас не интересует истинная длина сторон треугольника, а интересует только их отношение. Поскольку все прямоугольные треугольники с заданным углом α подобны, то удобно принимать стороны за элементы их отношения.

Например: $\frac{a}{c}=\frac{4}{5}\Rightarrow a=4;\ c=5$



1. ЭМ. Найдите $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, если $\sin x = -0{,}8$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Дано:

$\sin x = -0{,}8$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Найти: $\cos x$, $\operatorname{tg} x$

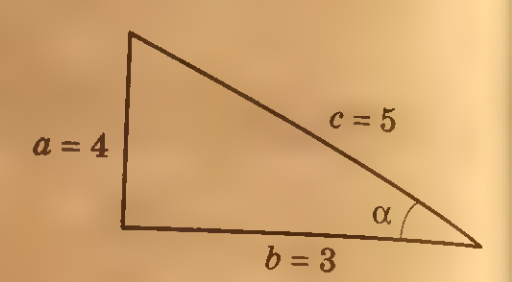


Рис. 16

Решение (рис. 16).

1) $|\sin\alpha| = \frac{a}{c} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = 4,\ c = 5$

2) $b = 3$ (египетский треугольник со сторонами 3, 4, 5)

$0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

3) $|\cos x| = \frac{b}{c}$; $\cos x = \frac{3}{5}$; $\cos x > 0$ — знак «+» (IV ч.)

4) $|\operatorname{tg} x| = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{tg} x < 0$ — знак «–» (IV ч.)

Ответ: $\cos x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$.

Внимание! Не забудьте поставить знак функции в ответе.

2. ЕГЭ. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Дано:

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Найти: $\operatorname{tg}\alpha$

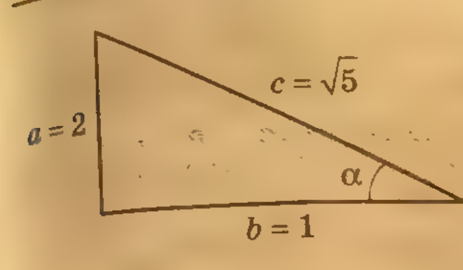


Рис. 17

Решение.

II способ (рис. 17).

1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = 1,\ c = \sqrt{5}$

2) $a = \sqrt{5-1} = 2$ | $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$|\mathrm{tg}\,\alpha| = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{1} = 2$ | знак «+» (I ч.)

Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

I способ.

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 : \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 5$

$\mathrm{tg}^2\alpha = 4 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = +2$ (I ч.)

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 : \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 : \dfrac{1}{5} = 5$

Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

Проверь себя!

1. Вычислите cos α и tg α, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Ответ: 1. $\cos\alpha = -0{,}8$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$. 2. $\dfrac{1}{3}$.

Определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса

Название «arc» переводится как «угол», «дуга». Мы рассматриваем углы в радианной мере, которые изображаются точками на единичной окружности. Им соответствуют действительные числа, причем

каждому числу — единственная точка. Обратное неверно, поэтому выделим числовые промежутки на окружности, в которых каждой точке окружности можно найти единственное значение угла (числа) α (arc).

Определение 1. *Арксинусом* числа $m \in [-1; 1]$ называется такой угол (число) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен m (рис. 18).

Символически: $\arcsin m = \alpha$, $|m| \le 1$.

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin m \le \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin m) = m, \ |m| \le 1$$

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m$$

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha, \ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

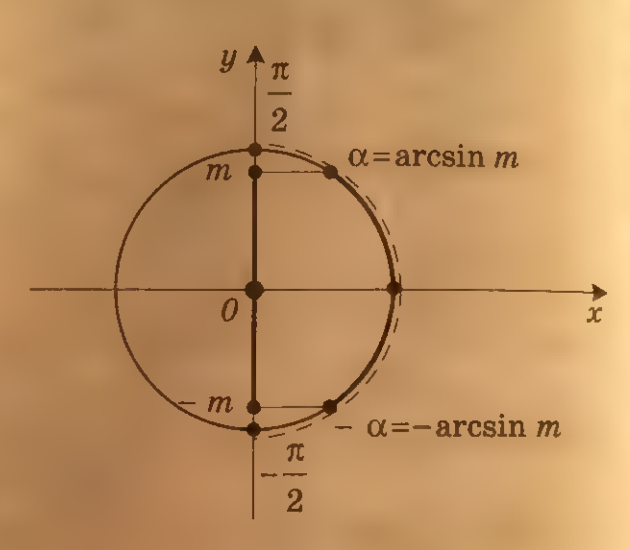


Рис. 18

Примеры

Вычислите.

1. $\arcsin\frac{1}{2}$. 2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение.

1. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.

2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1. $\frac{\pi}{6}$. 2. $-\frac{\pi}{4}$.

Проверь себя!

Вычислите.

1. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **2.** $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. **3.** $\arcsin(\sin 2)$.

Ответ: **1.** $-\frac{\pi}{3}$. **2.** $-\frac{\pi}{6}$. **3.** $\pi-2$.

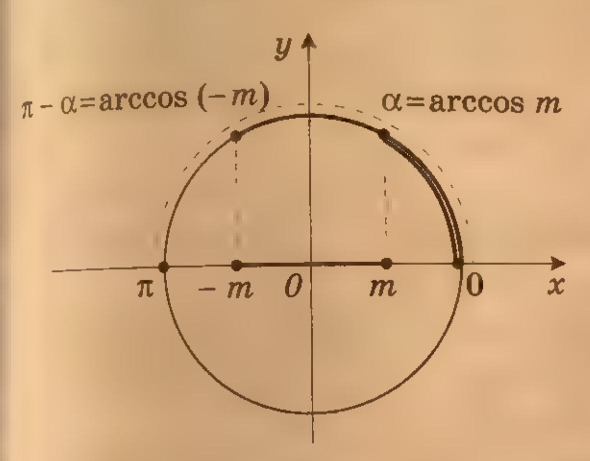


Рис. 19

Определение 2. *Арккосинусом* числа $m\in[-1;\ 1]$ называется такое число $\alpha\in[0;\ \pi]$, косинус которого равен m (рис. 19).

Символически: $\arccos m=\alpha$, $|m|\le 1$.

$$0\le\arccos m\le\pi$$

$$\cos(\arccos m)=m,\ |m|\le 1$$

$$\arccos(-m)=\pi-\arccos m$$

$$\arccos(\cos\alpha)=\alpha,\ 0\le\alpha\le\pi$$



Вычислите.

1. $\cos(\arccos 0{,}2)$. **2.** $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)$.

Решение.

1. $\cos(\arccos 0{,}2)=0{,}2$ | $\cos(\arccos m)=m,\ |m|\le 1;\ |0{,}2|\le 1$

2. $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right) =$

$= \pi - \arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6}{7}\pi$

$\arccos(-m) = \pi - \arccos m$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha$, если $0 \le \alpha \le \pi$

Ответ: **1.** 0,2. **2.** $\frac{6}{7}\pi$.

Проверь себя!

Вычислите.

1. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **2.** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. **3.** $\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$. **4.** $\arccos(\cos 3)$.

Ответ: **1.** $\frac{\pi}{4}$. **2.** $\frac{2\pi}{3}$. **3.** $-\frac{3}{4}$. **4.** 3.

Определение 3. *Арктангенсом* числа $m \in \boldsymbol{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен m (рис. 20).

Символически: $\operatorname{arctg} m = \alpha$.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} m < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m, \; m \in \boldsymbol{R}$$

$$\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha, \; -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

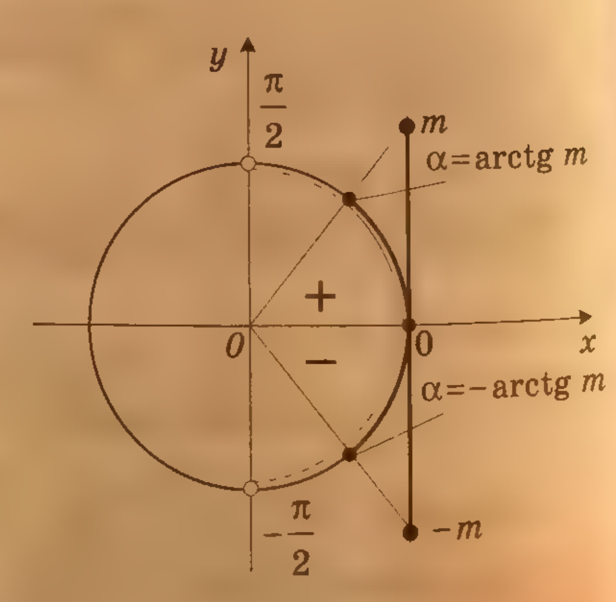


Рис. 20



Примеры

Вычислите.

1. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. 2. $\operatorname{arctg}(-1)$.

Решение.

1. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$.

2. $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ и $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1. $\frac{\pi}{3}$. 2. $-\frac{\pi}{4}$.

Проверь себя!

Вычислите.

1. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 2. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$. 3. $\operatorname{arctg} 1$.

Ответ: 1. $-\frac{\pi}{6}$. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. $\frac{\pi}{4}$.

Определение 4. ***Арккотангенсом*** числа $m\in \boldsymbol{R}$ называется такое число $\alpha\in(0;\pi)$, котангенс которого равен m (рис. 21).

Символически: $\operatorname{arcctg} m=\alpha$.

$$0<\operatorname{arcctg} m<\pi$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} m)=m,\ m\in \boldsymbol{R}$$

$$\operatorname{arcctg}(-m)=\pi-\operatorname{arcctg} m$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha,\ 0<\alpha<\pi$$

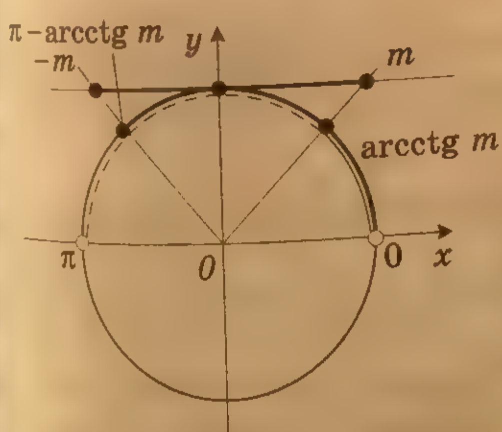
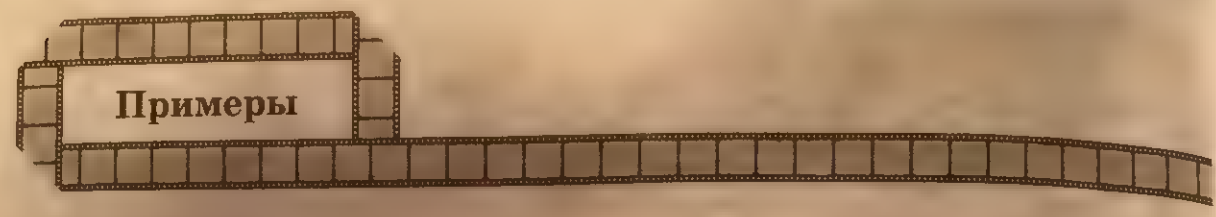


Рис. 21



Вычислите.

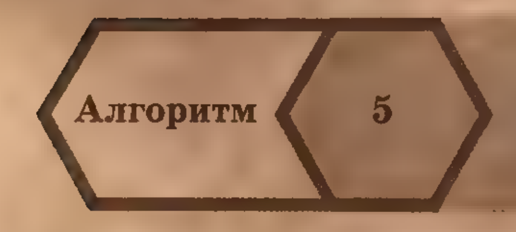
1. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$. 2. $\operatorname{arcctg}(-1)$.

Решение.

1. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ и $0 < \frac{\pi}{6} < \pi$.

2. $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$, так как $\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi = \bar{\operatorname{ctg}}\left(\overset{\text{II}}{\underset{\leftrightarrow}{\pi} - \frac{\pi}{4}}\right) = -1$.

Ответ: 1. $\frac{\pi}{6}$. 2. $\frac{3}{4}\pi$.



Вычисление значений углов (arc) по значению синуса, косинуса, тангенса или котангенса ($\alpha = \arcsin m$, $\alpha = \arccos m$, $\alpha = \operatorname{arctg} m$, $\alpha = \operatorname{arcctg} m$)

① Примените, если необходимо, формулы $\arcsin(-m) = -\arcsin m$, $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$, $\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m$, $\operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m$.

② Найдите в таблице на с. 322 или в таблицах В. М. Брадиса значение m.

③ Найдите соответствующее ему значение α — это и будет значение угла (arc), запишите его.

Чтобы найти $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)$, нужно привести значение α к промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $[0; \pi]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ или $(0; \pi)$ соответственно, используя свойства периодичности тригонометрических функций, а затем применить одну из формул $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$.

Чтобы найти значение m, упростите выражение, применяя формулы приведения $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} m\right)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} m)=m$, а затем примените формулы $\sin(\arcsin m)=m$, $|m|\le 1$ и т. д. Формулы записывайте за чертой справа.

Примеры

Вычислите.

1. $\arcsin(\sin 5)$
2. $\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{4}\right)$
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)$
4. $\arccos(\cos 4)$
5. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 6)$
6. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Решение.

1. $\arcsin(\sin 5)=\arcsin(\sin(5-2\pi))=$
$=5-2\pi$

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$,

если $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

$5>\frac{\pi}{2}$ $(\approx 1{,}57)$

$5-2\pi\approx 5-6{,}28\approx -1{,}28$

$-\frac{\pi}{2}\le 5-2\pi\le\frac{\pi}{2}$

$\sin(\alpha-2\pi)=\sin\alpha$

2. $\overset{-}{\cos}\Big(\underset{\leftrightarrow}{\pi}+\underbrace{\overset{\text{III}}{\arccos}\frac{3}{4}}_{\alpha}\Big)=-\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$

$\overset{-}{\cos}\Big(\overset{\text{III}}{\underset{\leftrightarrow}{\pi}+\alpha}\Big)=-\cos\alpha$

$3.\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\underbrace{\arccos\frac{1}{3}}_{\alpha}\right)=\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$\overset{+}{\sin}\left(\updownarrow\overset{\text{II}}{\frac{\pi}{2}}+\alpha\right)=\cos\alpha$

4. $\arccos(\cos 4)=\arccos(\cos(4-2\pi))=$
$=\arccos(\cos(2\pi-4))=2\pi-4$

$\arccos(\cos\alpha)=\alpha,\ 0\le\alpha\le\pi$
$2\pi-4\approx 2{,}28$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

5. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}6)=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(6-\pi))=6-\pi$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha,\ 0<\alpha<\pi$
$6-\pi\approx 6-3{,}14\approx 2{,}86$
$0<6-\pi<\pi$

$6.\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$

Ответ: 1. $5-2\pi$. 2. $-\frac{3}{4}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $2\pi-4$. 5. $6-\pi$. 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. ЕГЭ. Найдите значения выражения $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение.

$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$
$=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arcsin(-m)=-\arcsin m$

Ответ: 0.

8. ЕГЭ. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Решение.

1) Найдем $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, тогда $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$

2) $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}-1=1:\frac{1}{16}-1=15$

$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$
$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$

Ответ: 15.

9. ЕГЭ. Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right)\right)$.

Решение.

$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right)=$$

$$=5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{7}}_{\alpha}\right)=$$

$$=5\sqrt{2}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=$$

$$=5\sqrt{2}\cos\left(\arccos\frac{7}{\sqrt{50}}\right)=$$

$$=\frac{5\sqrt{2}\cdot 7}{\sqrt{50}}=7$$

$\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right)$ (в IV ч.)

$\operatorname{arctg}(-m)=-\operatorname{arctg} m$

$\overset{+}{\sin}\left(\updownarrow\overset{\text{II}}{\dfrac{\pi}{2}+\alpha}\right)=\cos\alpha$

$\operatorname{arctg} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(см. формулы)

Ответ: 7.

Замечание. При решении задачи можно применить правило треугольника (рис. 22). Обозначим $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$ через α, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{7}$.

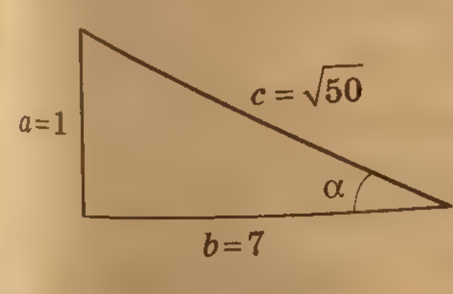


Рис. 22

$$|\operatorname{tg}\alpha|=\frac{a}{b}=\frac{1}{7}\Rightarrow a=1,\ b=7,$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{7}{\sqrt{50}},\ \text{получим}$$

$$5\sqrt{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{50}}=\frac{5\sqrt{2}\cdot 7}{5\sqrt{2}}=7$$

Ответ: 7.

10. ЕГЭ. Найдите значение выражения $5\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение.

$5\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=$

$=5\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}\right)=$

$=5\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=5\cdot\frac{4}{5}=4$

$\arcsin(-m)=-\arcsin m$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$

$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\cos\alpha>0,\ \alpha=\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$ в IV ч.

$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

Ответ: 4.

З а м е ч а н и я. 1. Можно при решении примера 10 использовать формулу $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}=$

$=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\alpha=\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$ в IV ч.

$\cos\alpha>0$

$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

2. Можно применить правило треугольника (рис. 23):

$|\sin\alpha|=\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$

$a=3,\ b=4,\ c=5$

$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$

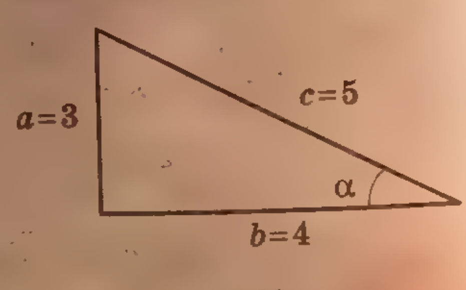


Рис. 23

Попробуй не реши!

Вычислите.

1. $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\text{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

2. $\cos\left(5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\text{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$

Ответ: 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$. 2. $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

Попробуй-ка реши!

1. Вычислите: а) $\arccos(\cos 7)$; б) $\text{arcctg}(\text{ctg}\,4{,}6)$.

2. Решите уравнение $\arcsin(2+3x)=\frac{\pi}{6}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}-\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

Ответ: 1. а) $7-2\pi$; б) $4{,}6-\pi$. 2. $-0{,}5$. 3. $\frac{m^2-1}{2}$.

Преобразование тригонометрических выражений

Для преобразования тригонометрических выражений нет единого алгоритма, но обратите внимание на следующее:

1) если даны функции углов, больших $\frac{\pi}{2}$, то приведите их к функциям углов $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

2) если дана сумма $\sin\alpha \pm \sin\beta$ или $\cos\alpha \pm \cos\beta$, то ее можно привести к произведению, применив соответствующие формулы (см. формулы на с. 545);

3) если углы отличаются друг от друга в 2 раза, то примените формулы двойного угла и приведите к функциям угла $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

В каждом случае найдите нужную формулу и запишите ее за чертой. Формулу выбирайте, просмотрев все тригонометрические формулы (см. с. 542–547).



1. Упростите: $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Решение.

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}=$$

$$=\frac{(1-\cos 2\alpha)-(\sin 3\alpha-\sin\alpha)}{(2\sin^2\alpha-1)+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos 2\alpha}{-\cos 2\alpha+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha-\cos 2\alpha)}{\sin\alpha-\cos 2\alpha}=2\sin\alpha$$

Сгруппируем слагаемые так, чтобы получить формулы (см. Приложения):

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$2\sin^2\alpha-1=-\cos 2\alpha$$

Ответ: $2\sin\alpha$.

2. Разложите на множители выражение $1-\cos\alpha+\sin\alpha$.

Решение.

$$1-\cos\alpha+\sin\alpha=(1-\cos\alpha)+\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

Ответ: $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

З а м е ч а н и е. Можно было $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ разложить по формулам двойного угла: $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Получится тот же ответ.

Проверь себя!

Упростите выражение.

1. $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}$. 2. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3. $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$.

Ответ: 1. $\frac{1}{\sin 4\alpha}$. 2. $\sin 2\alpha$. 3. $\operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство тригонометрических тождеств

Чтобы доказать тождество, примените один из пунктов:

1. Преобразуйте левую часть тождества и приведите ее к правой части (или наоборот).

2. Перенесите правую часть тождества влево и приравняйте полученную левую часть к нулю.

3. Преобразуйте отдельно левую и правую части так, чтобы они были равны.

З а м е ч а н и е. При доказательстве тождеств предполагается, что преобразования выполняются на области допустимых значений (ОДЗ) выражений, входящих в тождество.



Примеры

Докажите тождество (1–3).

1. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$

Доказательство.

Упростим левую часть тождества.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Получили выражение, стоящее в правой части. Тождество доказано.

2. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

Доказательство.

Преобразуем левую часть:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}=$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

Получили, что левая часть равенства равна правой части, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Можно было упростить правую часть.

3. $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha$

Доказательство.

Преобразуем левую часть:

$$1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$

Получили, что левая часть равенства равна правой части, что и требовалось доказать.

Попробуй-ка реши!

Докажите тождество.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

2. $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

3. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$

§ 2 Построение графиков тригонометрических функций

При вращении точки по окружности ее проекция на ось (например, Oy) совершает колебательные движения на отрезке $[-1; 1]$, и если эти колебания «развернуть», то получим график функции $y=\sin x$, которую мы рассматриваем как зависимость между углами в радианах, изображенными точками окружности, и ординатами этих точек. (При построении графика функции $y=\sin x$ и др. используйте окружность.)

Алгоритм 6 Исследование свойств функции $y = \sin x$

1. Найдите область определения функции: $D(\sin)=(-\infty; +\infty)$ (вся числовая ось Ox).

2. Найдите множество значений функции: $E(\sin)=[-1; 1]$ (график расположен между прямыми $y=-1$ и $y=1$).

3. Найдите нули функции: $y=0$; $\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi k$, $k\in Z$ (график пересекает ось Ox в точках 0; $\pm\pi$; $\pm2\pi$; ...).

4. Определите четность, нечетность функции: $\sin(-x)=-\sin x$ — нечетная функция (график симметричен относительно точки O (0; 0) и всех точек $\pi k, k\in Z$).

5. Определите знаки функции: $\sin x>0$ при $x\in(0+2\pi k; \pi+2\pi k)$, $k\in Z$ (график над осью Ox); $\sin x<0$ при $x\in(\pi+2\pi k; 2\pi+2\pi k)$ $k\in Z$.

6. Выясните монотонность функции (см. по окружности: $y=\sin x$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in Z$ (график направлен вверх-вправо (↗)); $y=\sin x$ убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right], k\in Z$ (график направлен вниз-вправо (↘)).

7. Определите точки экстремума функции: $\sin x = 1$ — максимум функции при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$; $\sin x = -1$ — минимум функции при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

8. Определите периодичность функции: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$; $T = 2\pi$ — наименьший период (график — бесконечная непрерывная волнообразная линия — синусоида).

9. Выясните обратимость функции $y = \sin x$. Функция $y = \arcsin x$ — обратная для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где $y = \sin x$ непрерывна и возрастает.

Алгоритм 7 **Построение графика функции $y = \sin x$**

① Возьмите за единицу по осям Ox и Oy 2 клетки, 12 клеток примите за 2π, 1 клетку — за $\frac{\pi}{6}$, 2 клетки — за $\frac{\pi}{3}$ и т. д. и нанесите эти значения на ось Ox.

② Проведите прямые $y = -1$ и $y = 1$.

③ Постройте точки $(0; 0)$; $\left(\frac{\pi}{6}; 0{,}5\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; $\left(\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5; \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}9; \ldots\right)$.

④ Постройте точки, симметричные этим точкам относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{так как } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)$.

⑤ Постройте точки, симметричные построенным точкам (п. 4) относительно точки $(\pi; 0)$ $\left(\sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)\right)$.

⑥ Соедините все точки плавной кривой, получите график на отрезке, равном периоду 2π.

⑦ Повторите полученный график (п. 6) влево и вправо на n периодов, получите график — синусоиду (рис. 24).

Замечание. Для быстрого построения графика функции $y = \sin x$ нанесите на ось Ox точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, π, 2π (1 ед. = 2 клетки), затем постройте точки $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ и $\left(\frac{3}{2}\pi; -1\right)$ и соедините плавной кривой точки $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Проведите кривую, симметричную построенной относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 24), а затем постройте линию, симметричную полученной, относительно точки $(\pi; 0)$.

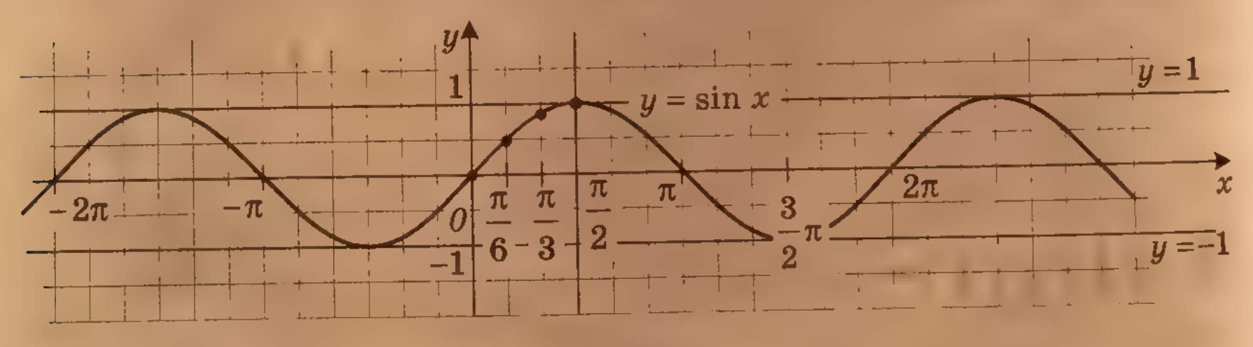


Рис. 24

Свойства функции $y = \cos x$ разберите, используя А–6.

Алгоритм 8 Построение графика функции $y = \cos x$

① Постройте график функции $y = \sin x$.

② Сдвиньте ось Oy вправо на $\frac{\pi}{2}$.

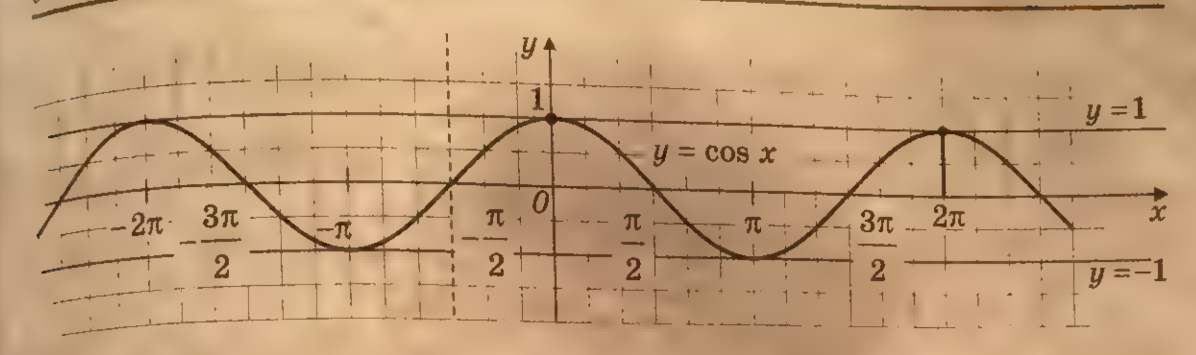


Рис. 25

③ Подпишите абсциссы точек для нового графика функции $y = \cos x$ (рис. 25).

Алгоритм 9 **Построение графиков функций** $y = \sin \omega x$ **и** $y = \cos \omega x$

① Постройте график функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$, подписав основные точки: 0; $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\pi$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm 2\pi$ — на оси Ox.

② Найдите $T = \frac{2\pi}{\omega}$ функций $y = \sin \omega x$ и $y = \cos \omega x$.

③ Вычислите значения основных точек для нового периода, для этого каждое значение аргумента (основные точки из п. 1) разделите на $\omega > 0$.

④ Постройте новый график, проходящий через новые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

З а м е ч а н и я. 1. Значение ω влияет на сжатие и растяжение графика вдоль оси Ox: чем больше $|\omega|$, тем больше сжатие; чем меньше $|\omega|$, тем больше растяжение (T больше).

2. Построение графика гармонического колебания $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ см. в А — 32.

Например: построение графика функции $y = \sin 2x$ дано на рисунке 26.

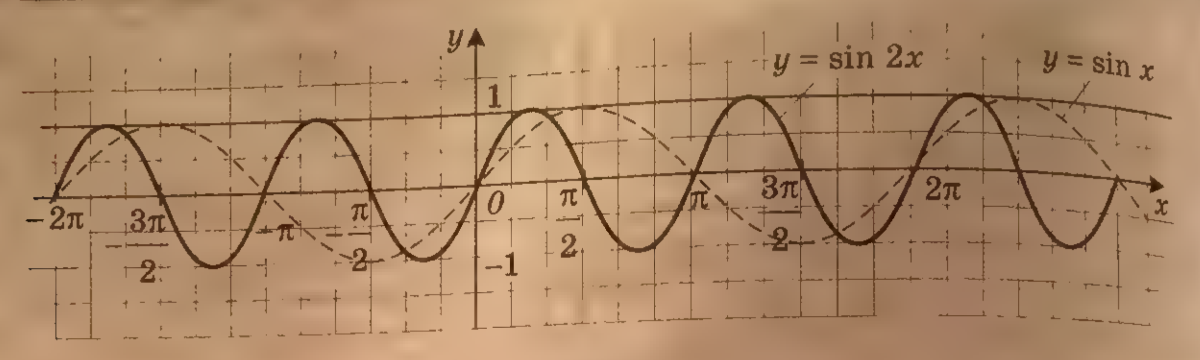


Рис. 26

Проверь себя!

Постройте график функции $y=\cos\frac{x}{2}$.

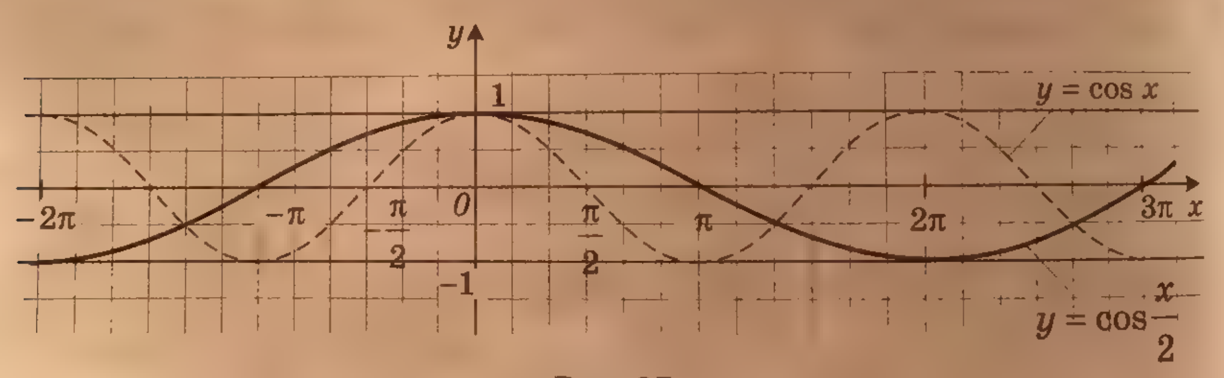


Рис. 27

Алгоритм 10 Исследование свойств функции $y=\operatorname{tg}x$

1. Найдите область определения функции: $D(\operatorname{tg})=(-\infty;+\infty)$, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ (в точках $x_0=\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \pm\frac{5}{2}\pi;\ \ldots$ проведем прямые, параллельные оси Oy (асимптоты)).

2. Определите множество значений функции: $E(\mathrm{tg}) = (-\infty; +\infty)$ — все действительные числа $\boldsymbol{R}$.

3. Определите четность, нечетность функции: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\,x$ — нечетная функция, ее график симметричен относительно точки $O(0; 0)$.

4. Найдите нули функции: $y = 0$; $\mathrm{tg}\,x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, график пересекает ось Ox в точках $(0; 0)$; $(-\pi; 0)$; $(\pi; 0)$; $(2\pi; 0)$, ...

5. Определите знаки функции: $\mathrm{tg}x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и на всех промежутках $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — график над осью Ox; $\mathrm{tg}x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и на всех промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — график под осью Ox.

6. Определите монотонность функции: $y = \mathrm{tg}x$ возрастает на всей $D(f)$ (см. окружность), график направлен вверх-вправо ($\nearrow$).

7. Определите точки экстремума: не существуют (по 2-му свойству).

8. Определите периодичность функции: $\mathrm{tg}(x + \pi k) = \mathrm{tg}\,x$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $T = \pi$ — наименьший период. Поэтому достаточно рассмотреть поведение функции на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

9. Выясните обратимость функции $y = \mathrm{tg}x$. Функция $y = \mathrm{tg}x$ обратима на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, где функция непрерывна и монотонно возрастает. Обратная ей функция — $y = \mathrm{arctg}\,x$.

Алгоритм 11 Построение графика функции $y = \text{tg}\, x$

① Проведите вертикальные асимптоты через точки $\left(\pm\frac{\pi}{2};\, 0\right)$, $\left(\pm\frac{3}{2}\pi;\, 0\right)$, $\left(\pm\frac{5}{2}\pi;\, 0\right)$, ...

② Постройте точки (0; 0), $\left(\frac{\pi}{6};\ \approx 0{,}6\right)$, $\left(\frac{\pi}{4};\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3};\ \approx 0{,}7\right)$ и соедините их плавной кривой, приближая ее к асимптоте.

③ Постройте кривую, симметричную построенной относительно точки O (0; 0). Получим график на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

④ Постройте ветви графика на каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ (п. 8 А — 10).

График функции $y = \text{tg}x$ есть множество всех ветвей на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 28).

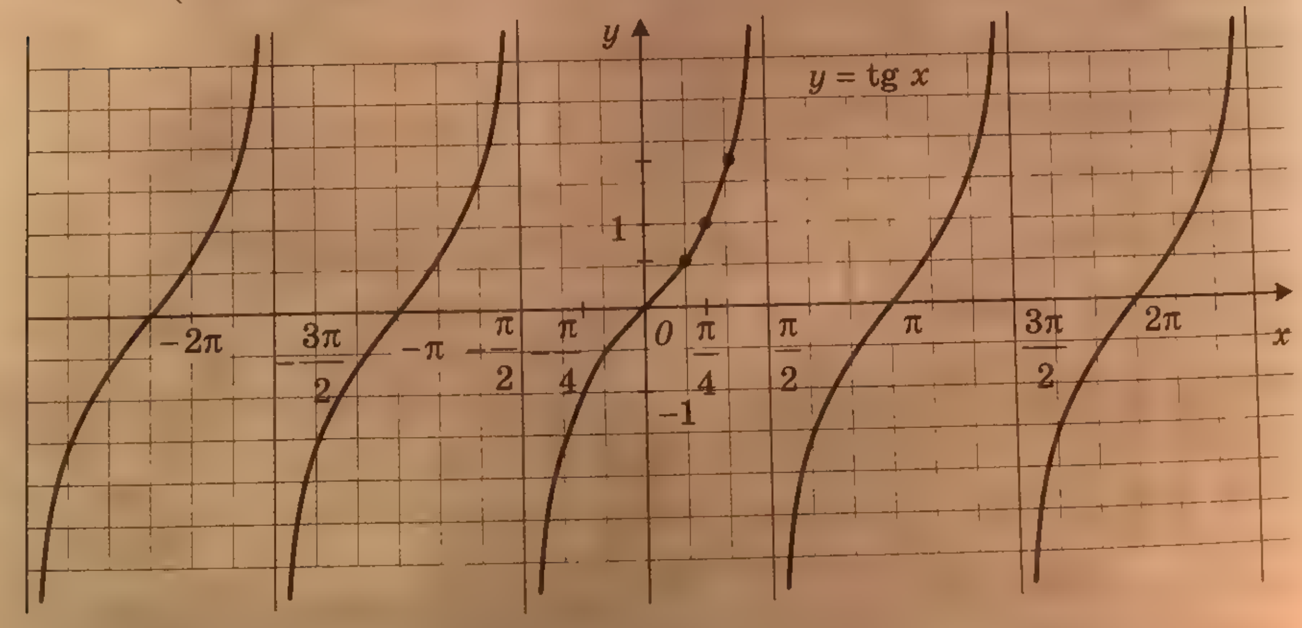


Рис. 28

Свойства функции $y = \text{ctg}x$ разберите, используя А–10.



Построение графика функции $y = \operatorname{ctg} x$

① Проведите вертикальные асимптоты через точки $x = \pm\pi$; $x = \pm 2\pi$; ... .

② Отметьте нули функции: $y = 0$; $\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ (точки пересечения с осью Ox: $x = \pm\frac{\pi}{2}$; $x = \pm\frac{3}{2}\pi$; ...).

③ Постройте точки $\left(\frac{\pi}{6}; \approx 1{,}7\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \approx 0{,}6\right)$ и соедините их плавной кривой, приближая ее к асимптотам.

④ Постройте кривую, симметричную построенной кривой относительно точки $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

⑤ Повторите построение этих кривых на промежутках $(\pi n; \pi(n+1))$, $n \in Z$, — получите множество ветвей, это и есть график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 29).

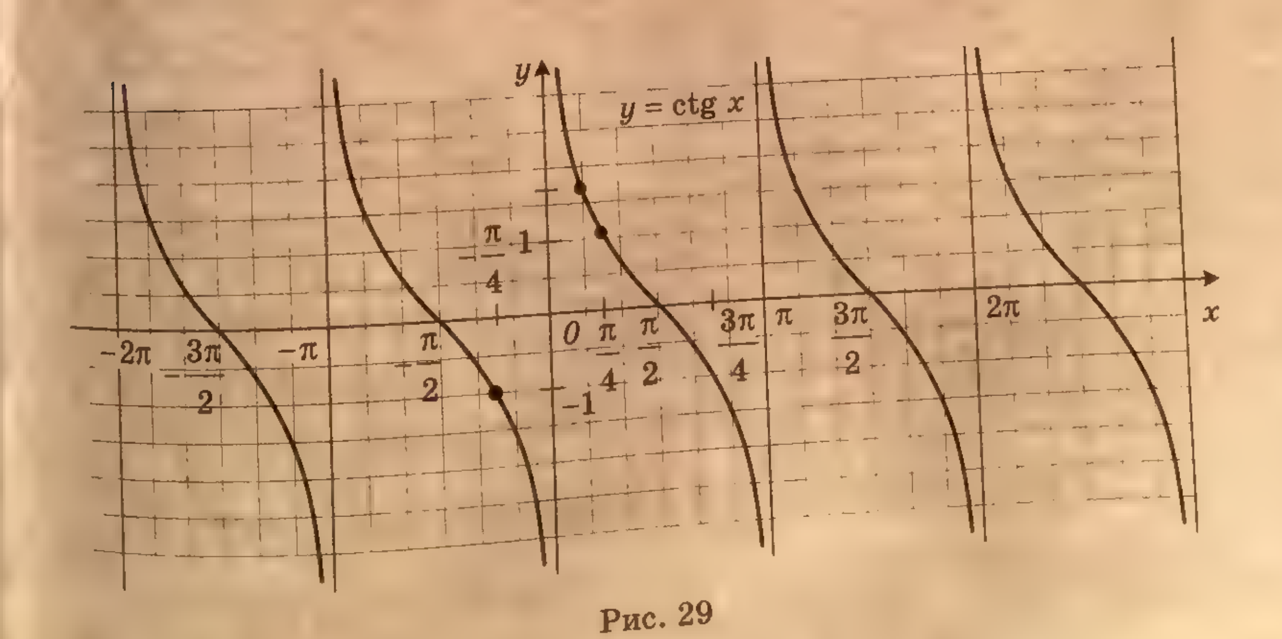


Рис. 29

З а м е ч а н и е. Графики функций $y = \sec x$ и $y = \operatorname{cosec} x$ представлены на рисунках 30 и 31 соответственно.

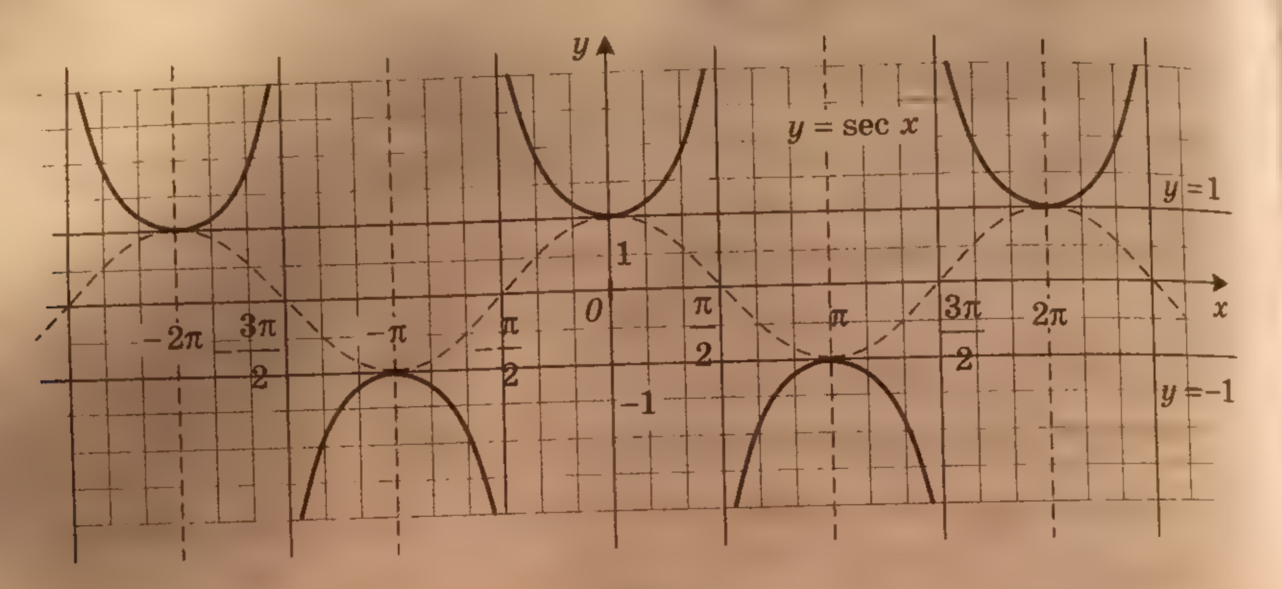


Рис. 30

I. $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$; $|\sec x| \geq 1$; $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 30).

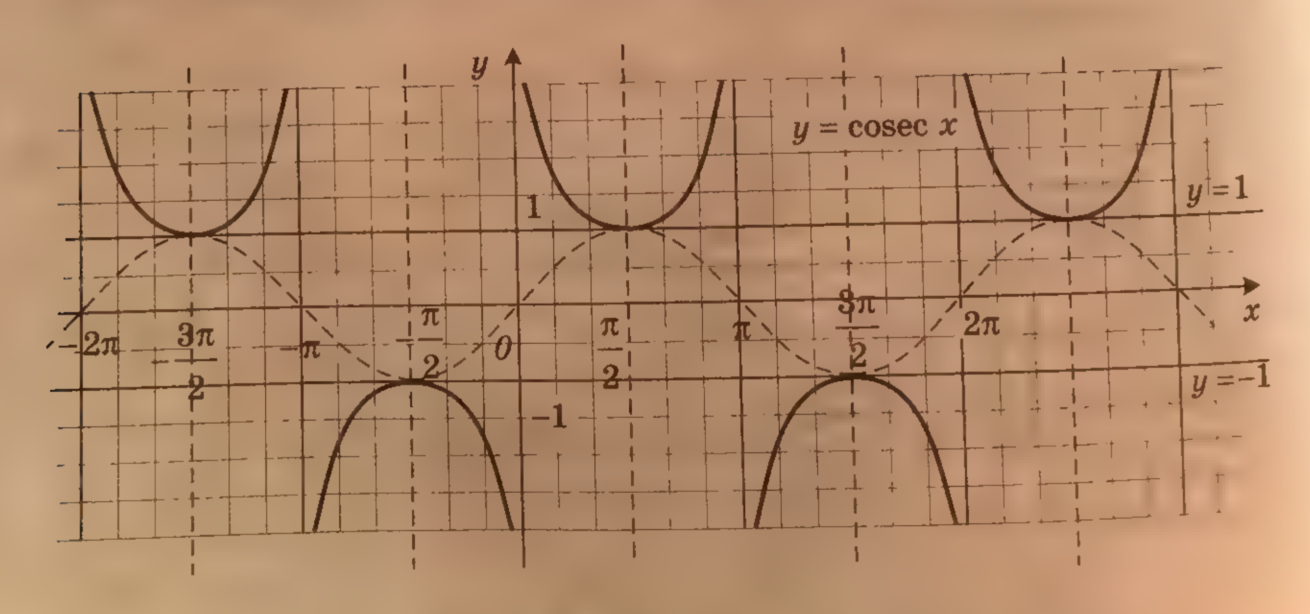


Рис. 31

II. $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$; $|\operatorname{cosec} x| \geq 1$; $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 31).

Графики функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$ являются функциями, обратными для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$. Поэтому построение их графиков сведется к построению линий, симметричных частям графиков, соответствующих прямым функциям, относительно прямой $y = x$, на промежутках, где прямые функции непрерывны и монотонны, причем свойство возрастания или убывания сохраняется и для обратных функций.

$y = \arcsin x$

1) Область определения: $D(y) = [-1;1]$ ($|\sin x| \le 1$).

2) Множество значений: $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (по определению).

Остальные свойства функции $y = \arcsin x$ изучите самостоятельно по схеме исследования функции $y = \sin x$.

Функция $y = \arcsin x$ — обратная функции $y = \sin x$, заданной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, где $y = \sin x$ возрастает. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 32).

$y = \arccos x$

1) Область определения: $D(y) = [-1;1]$ ($|\cos x| \le 1$).

2) Множество значений: $E(y) = [0;\pi]$, (по определению).

Функция $y = \arccos x$ — обратная функции $y = \cos x$, заданной на отрезке $[0;\pi]$, где $y = \cos x$ убывает. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 33).

$y = \mathrm{arctg}\, x$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

2) Множество значений: $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (по определению).

Остальные свойства функции $y = \mathrm{arctg}\, x$ изучите самостоятельно, используя схему исследования функции $y = \mathrm{tg}\, x$.

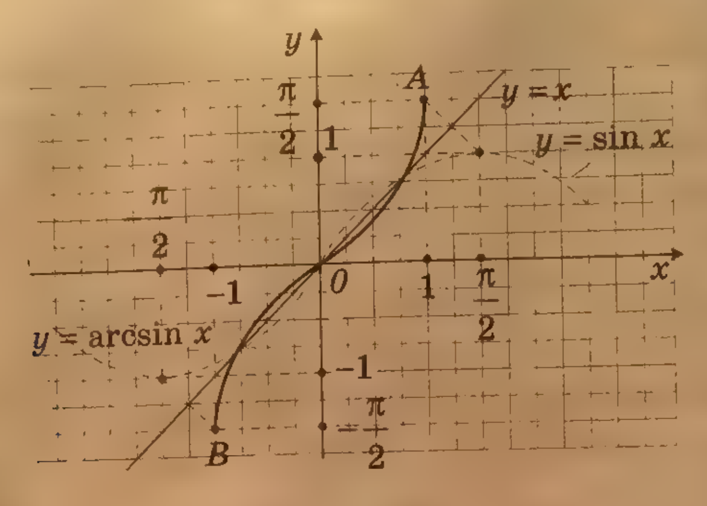


Рис. 32

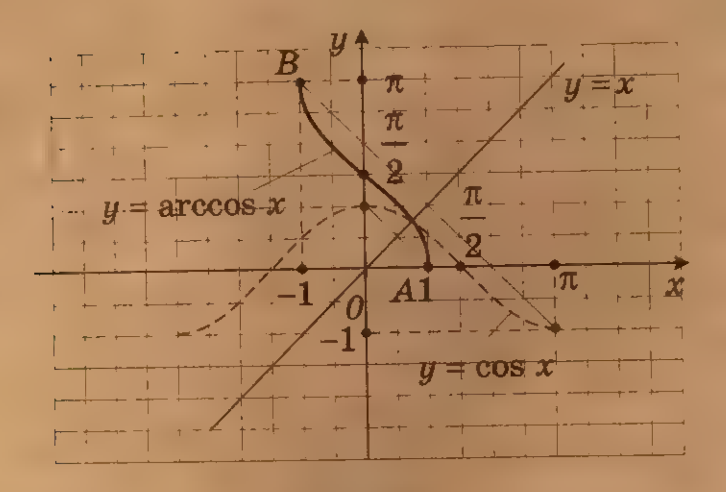


Рис. 33

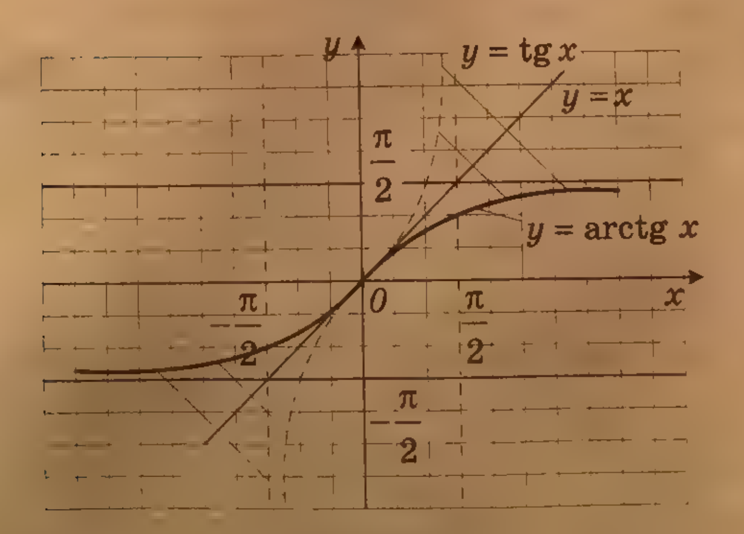


Рис. 34

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ — обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, заданной на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, где $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и возрастает. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 34).

$y = \operatorname{arcctg} x$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Множество значений: $E(y) = (0; \pi)$.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ — обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$, заданной на интервале $(0; \pi)$, где $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и убывает. Графики симметричны относительно прямой $y = x$. (Постройте самостоятельно график функции $y = \operatorname{arcctg} x$) (см. стр. 550).

Решение примеров на свойства тригонометрических функций

1. Найдите область определения функции:

1) $y = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \arcsin(x^2 - 1)$.

Решение.

1) $y = \operatorname{tg}\underbrace{\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}_{f(x)}$

$f(x) = 3x + \frac{\pi}{4}$

$y = \operatorname{tg} f(x)$ имеет смысл, если

$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}$

2) $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \ \Big| -\frac{\pi}{4}$

$3x = \frac{\pi}{4} + \pi k \ \Big| :3$

$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, \ k \in \mathbf{Z}$

Ответ: $x \in \mathbf{R}, \ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, \ k \in \mathbf{Z}$.

2) $y = \arcsin \underbrace{(x^2 - 1)}_{f(x)}$

$f(x) = x^2 - 1$

$y = \arcsin f(x)$ имеет смысл, если $-1 \le f(x) \le 1$

$-1 \le x^2 - 1 \le 1 \quad | +1$

$0 \le x^2 \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

если $|x| \le a$, то $-a \le x \le a$

Ответ: $D(y) = [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$.

2. ЕГЭ. Найдите множество значений функции $y = \sin x - 3$. Ответ выбрать из предложенных промежутков: 1) $[-4;\ -2]$; 2) $[-10;\ -4]$; 3) $[-4;\ 4]$; 4) $[-10;\ 10]$.

Решение.

I способ.

Пусть $y = a$, тогда

$\sin x - 3 = a$

$\sin x = a + 3$

$-1 \le a + 3 \le 1 \quad | -3$

$-1 \le \sin x \le 1$

$-4 \le a \le -2 \Rightarrow -4 \le y \le -2 \Leftrightarrow [-4;\ -2]$

II способ.

$-1 \le \sin x \le 1 \quad | -3$

$E(\sin) = [-1; 1]$

$-4 \le \underbrace{\sin x - 3}_{y} \le -2 \Rightarrow -4 \le y \le -2$, т. е. $E(y) = [-4;\ -2]$

Ответ: номер верного ответа 1.

3. ЕГЭ. Найдите множество значений функции

$$y=\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\underbrace{\left(0,25(\sqrt{3}\sin x-\cos x+2)\right)}_{f(x)}$$

Решение.

Упростим выражение $f(x)$:

$$0,25(\sqrt{3}\sin x-\cos x+2)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin x-\cos x+2)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\right)$$

$$0,25=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=$$
$$=\sin(\alpha-\beta)$$

2) Найдем множество значений функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\right)$$

$$-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1\ \Big|+1$$

$$0\le\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\le 2\ \Big|\cdot\frac{1}{2}$$

$$0\le\underbrace{\frac{1}{2}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\right)}_{f(x)}\le 1$$

$$0\le\operatorname{arctg} f(x)\le\frac{\pi}{4}\ \Big|\cdot\frac{8}{\pi}$$

$-1\le\sin x\le 1$

$y=\operatorname{arctg} f(x)$ — возрастающая и непрерывная функция, $\operatorname{arctg} 0=0$;

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$$

3) Получим $0\cdot\frac{8}{\pi}\le\underbrace{\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg} f(x)}_{y}\le\frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{\pi}$, т. е. $0\le y\le 2$.

Ответ: $E(y)=[0;\ 2]$.

4. ЕГЭ. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y=1{,}5\cdot\sqrt{25\cos^2 x+10\cos x+14}$$

Решение.

1) ОДЗ: $x\in R$

2) $25\cos^2 x+10\cos x+14$ имеет наибольшее значение, если $\cos x=1$:

$25\cdot1+10\cdot1+14=49$, тогда

$y=1{,}5\cdot\sqrt{49}=1{,}5\cdot7=10{,}5$;

$y=10$ — наибольшее *целое* значение функции

1) $y=\sqrt{f(x)}$ имеет смысл, если $f(x)\ge0$

$|\cos x|\le1$

$\cos^2 x\ge0\Rightarrow25\cos^2 x\ge0$

$14>10\cos x$ при любом x

2) $\sqrt{f(x)}$ имеет наибольшее значение, если $f(x)$ — наибольшее

Ответ: $y=10$.

5. ЕГЭ. Укажите количество промежутков возрастания функции $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$, **заданной на отрезке** $[0;\ 2\pi]$.

Решение.

1) $D(f)=\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup$

$\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\pi\right]$

Дробь $\frac{a}{b}$ имеет смысл при $b\ne0$

$\cos x\ne0\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

на отрезке $[0;\ 2\pi]$ $x\ne\frac{\pi}{2};\ x\ne\frac{3}{2}\pi$

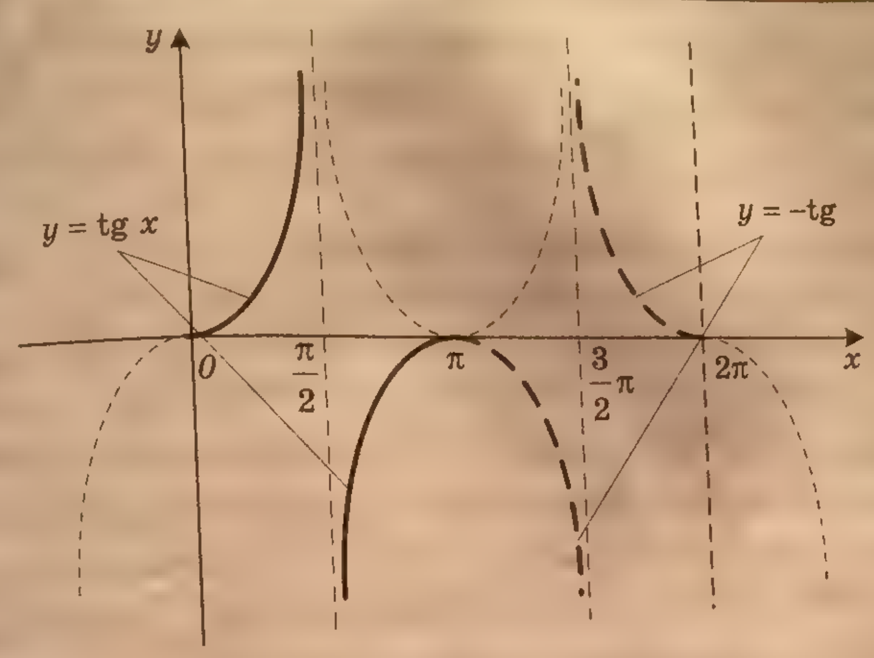


Рис. 35

2) Упростим выражение

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x}=\frac{|\sin x|}{\cos x};$$

раскроем скобки модуля:

а) $\sin x>0,\ x\in(0;\pi),\ f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x;$

б) $\sin x<0,\ x\in(\pi;2\pi),\ f(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x.$

$1-\cos^2 x=\sin^2 x$

$\sqrt{a^2}=|a|$

$|a|=a$, если $a>0$

$|a|=-a$, если $a<0$

3) $f(x)=\operatorname{tg} x$ — непрерывная и возрастающая функция на промежутках $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ для случая «а».

$f(x)=-\operatorname{tg} x$ — непрерывная и убывающая функция на промежутках $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ и $\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$ для случая «б».

Можно показать это решение на графике (рис. 35).

Ответ: 2 промежутка возрастания.



Решение тригонометрических уравнений

Определение. Уравнение, в котором переменная стоит под знаком тригонометрических функций, называется *тригонометрическим*.

З а м е ч а н и е. Тригонометрическое уравнение имеет множество корней в силу периодичности тригонометрических функций.

Решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших уравнений: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$.

1. Рассмотрим решение уравнения $\sin x = a$ на единичной окружности (рис. 36). Для каждого значения синуса $|a| < 1$ на окружности существуют два вида углов (чисел), причем: если $a > 0$, то $x_1 = x_0 + 2\pi k$, $x_2 = \pi - x_0 + 2\pi k$, $k \in Z$; если $a < 0$, то $x_1 = -x_0 + 2\pi k$, $x_2 = -(\pi - x_0) + 2\pi k$, $k \in Z$. Оба эти вида углов можно объединить в одну формулу $x = (-1)^n x_0 + \pi n$, $n \in Z$, где x_0 — единственный корень из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ($x_0 = \arcsin a$), тогда $x = (-1)^n \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$.

2. Рассмотрим решение уравнения $\cos x = a$ на единичной окружности (рис. 37). Для каждого значения косинуса $|a| < 1$ на окружности существуют два вида углов (чисел), причем: если $a > 0$, то $x_{1,2} = \pm x_0 + 2\pi k$, $k \in Z$.

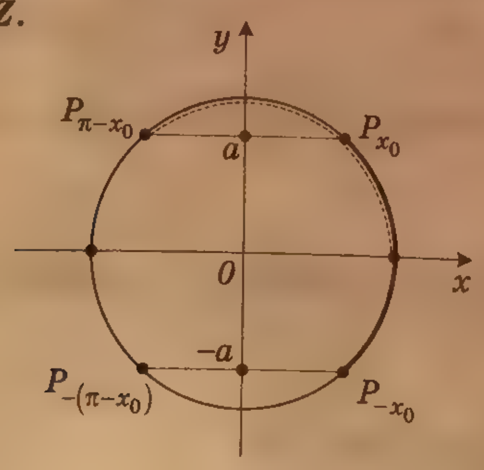


Рис. 36

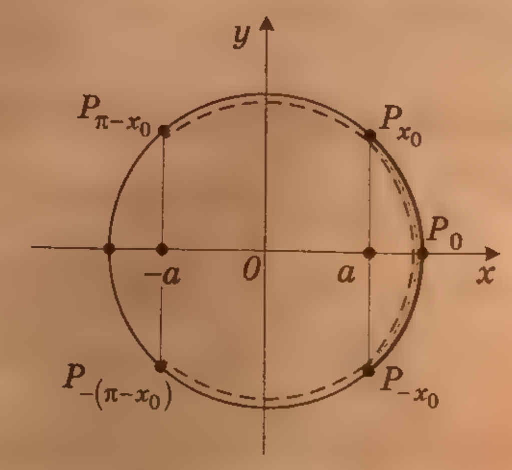


Рис. 37

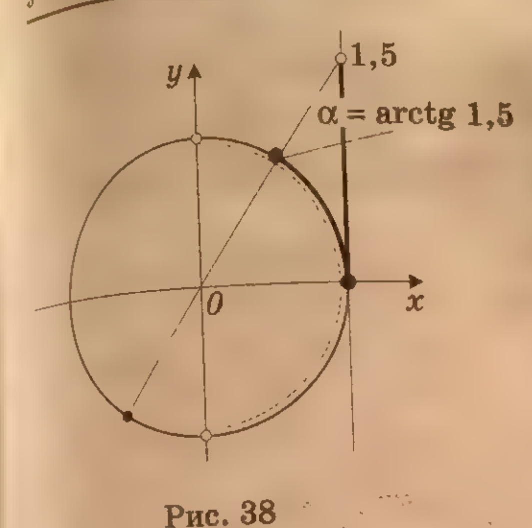


Рис. 38

если $a < 0$, то $x_1 = \pi - x_0 + 2\pi k$, $x_2 = -(\pi - x_0) + 2\pi k$, $k \in Z$. Все корни находятся через меньший корень x_0 из отрезка $[0; \pi]$ ($x_0 = \arccos a$), $x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$.

3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ **для** $a \in R$ имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ единственный корень $x_0 = \operatorname{arctg} a$, причем: если $a \geq 0$, то $x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; если $a < 0$, то $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Второй вид корней отличается от x_0 на π (рис. 38), поэтому получаем следующую формулу для решения уравнений $\operatorname{tg} x = a$: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in Z$.

4. Для уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ аналогично: если $a > 0$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$ и если $a < 0$, то $x = \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$.

Алгоритм 13 **Решение уравнения** $b \sin x + c = d$

① ОДЗ: $x \in R$.

② Приведите исходное уравнение к виду $\sin x = a$.

Например: а) $b \sin x = d \mid : b \Rightarrow \sin x = \underbrace{d : b}_{a}$;

б) $b \sin x + c = d$, то $\sin x = \underbrace{(d - c) : b}_{a}$.

③ Оцените $|a|$ и выберите нужный случай.

1) Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет решений.

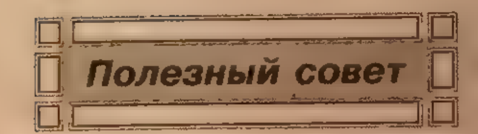
Например: уравнения $\sin x = -1{,}5$ и $\sin x = \sqrt{2}$ не имеют корней.

2) Если $|a|<1$, то уравнение $\sin x = a$ решайте по общей формуле $x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$ (см. Полезный совет ниже).

3) Если $a = -1;\ 0;\ 1$, то уравнения решайте как частные случаи по формулам:

$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
$x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$	$x=\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$	$x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$

Формулы пишите за чертой справа.



1. Формула $x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, содержит в себе два вида корней: при $n = 2k$ (четном) $x=\arcsin a+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$ (I четверть); при $n = 2k + 1$ (нечетном) $x=\pi-\arcsin a+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$ (II четверть).

2. Если $a < 0$, $|a| < 1$, то $x=(-1)^n \arcsin(-a)+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, можно вычислить по формуле $x=(-1)^{n+1} \arcsin a+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

З а м е ч а н и е. Для решения уравнений $\sin x = -1$, $\sin x = 0$ и $\sin x = 1$ можно использовать единичную окружность (рис. 39).

1. $\sin x = 1 \Leftrightarrow y_{P_{\frac{\pi}{2}}}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$

2. $\sin x = 0 \Rightarrow y_{P_0}=0$

или $y_{P_\pi}=0 \Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$

3. $\sin x = -1 \Leftrightarrow y_{P_{-\frac{\pi}{2}}}=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$

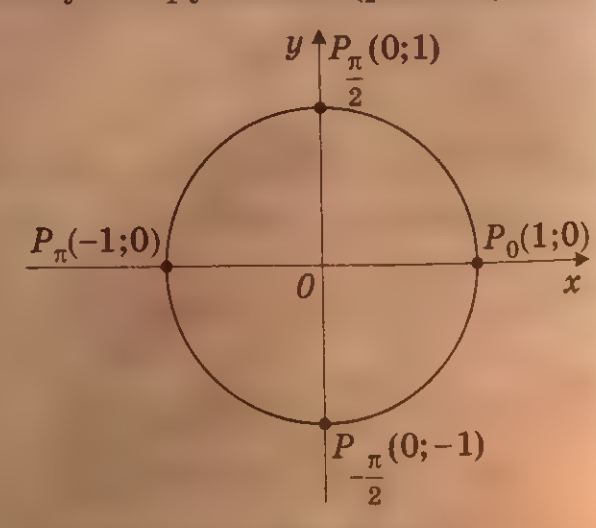


Рис. 39



Примеры

Решите уравнение.

1. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

2. $\sin x=-0{,}3$

3. $\sin 3x=0$

4. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$

5. ЕГЭ. $\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{5}{2}x-\cos\frac{3}{2}x\cdot\sin\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$

Решение.

1. $2\sin\underbrace{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}_{y}=1 \mid :2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\underbrace{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}_{y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

$\sin y=a$

$y=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

Полученное решение можно записать как два множества:

1) если $n=2k$, то $x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\pi\cdot 2k,\ k\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\pi\cdot 2k,\ k\in\mathbf{Z}$

2) если $n=2k+1$, то $x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1),\ k\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1),\ k\in\mathbf{Z}$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+\pi\cdot 2k,\ k\in\mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1),\ k\in\mathbf{Z}$, или в виде общего решения: $-\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

2. $\sin x = -0{,}3$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin 0{,}3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

$\sin x = -a$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin|a| + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Ответ: $(-1)^{n+1} \arcsin 0{,}3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

3. $\sin \underbrace{3x}_{y} = 0 \Leftrightarrow 3x = \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} k,\ k \in \mathbf{Z}$

$\sin y = 0 \Leftrightarrow y = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{3} k,\ k \in \mathbf{Z}$.

4. $\sin \underbrace{\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}_{y} = 1 \Leftrightarrow$

$\sin y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k \ \Big|:2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Ответ: $\frac{5}{12}\pi + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

5. $\sin \frac{3}{2} x \cdot \cos \frac{5}{2} x - \cos \frac{3}{2} x \cdot \sin \frac{5}{2} x =$

$= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin(-x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$

$\alpha = \frac{3}{2}x,\quad \beta = \frac{5}{2}x$

$\sin x = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$

$n \in \mathbf{Z}$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$
2. $4\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=3$
3. $3\sin x=4$
4. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

Ответ: 1. $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$. 2. $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$. 3. $\varnothing$. 4. $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

Алгоритм 14 Решение уравнения $b\cos x+c=d$

① ОДЗ: $x\in R$.

② Приведите исходное уравнение к виду $\cos x = a$.

Например: $b\cos x = d\ |: b$, т. е. $\cos x=\underbrace{d:b}_{\blacksquare}$.

③ Оцените $|a|$ и выберите нужный случай.

1) Если $|a|>1$, то уравнение $\cos x=a$ не имеет решений.

Например: $\cos x=\pi$; $\cos x=-3$; $\cos x=1{,}5$ — уравнения не имеют корней.

2) Если $|a|<1$ и $a>0$, то уравнение $\cos x=a$ решайте по формуле $x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$; при $a<0$ $x=\pm(\pi-\arccos a)+2\pi k,\ k\in Z$.

④ Если $a = -1;\ 0;\ 1$, то уравнения решайте как частные случаи по формулам или по окружности (рис. 39).

$\cos x=-1$	$\cos x=0$	$\cos x=1$
$x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$	$x=2\pi k,\ k\in Z$

Формулы пишите за чертой справа.



1. ЕГЭ. Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\cos^2 x+\cos x-1$$

Ответ выберите из предложенных чисел: 1) $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Решение.

$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\cos^2 x+\cos x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos^2 x=\cos^2 x+\cos x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$

ОДЗ: $\mathrm{tg}\,x$ имеет смысл при

$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^2\alpha$

Ответ: номер верного ответа 1.

Решите уравнение (2–4).

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-\frac{1}{3}$. **3. ЕГЭ.** $\cos^2 x-\sin^2 x=0{,}5$.

4. ЭМ. $\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{2}-\sin^2 x$.

Решение.

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\cos\underbrace{\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}_{y}=-\frac{1}{3}$

$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$

ОДЗ: $x\in\mathbf{R}$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos y=-a,\ |a|<1$

$y=\pm(\pi-\arccos a)+2\pi k,$

$k\in\mathbf{Z}$

$$2x=\frac{\pi}{4}\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi k\,\Big|:2$$

$$x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}(a-b)$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}\pm\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

3. $\cos^2 x-\sin^2 x=0{,}5\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\cos\underbrace{2x}_{y}=0{,}5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\arccos 0{,}5+2\pi k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$$

приведите уравнение к виду $\cos y=a$

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$

$$\cos y=a\Leftrightarrow y=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\arccos\ 0{,}5=\frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

4. $\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{2}-\sin^2 x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x+1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm(\pi-\arccos\frac{1}{2})+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos x=-a\ \left(|a|<1,\ a<0\right)$$

$$x=\pm(\pi-\arccos a)+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\arccos\ \frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

Ответ: $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

Полезный совет

Значения $\arccos a$ находите сразу по таблице (с. 322).

Например: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi.$

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $\cos(-2x)=-1$
2. $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=\sqrt{3}$
3. $5\cos\frac{x}{3}=0$
4. $\cos 5x=2$

Ответ: 1. $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. 2. $\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k,\ k\in Z$. 3. $\frac{3}{2}\pi+3\pi k,\ k\in Z$.
4. Нет корней.

Попробуй-ка реши!

Решите уравнение $1-2\cos 3x+\cos^2 3x=\frac{1}{4}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k,\ k\in Z$.

Алгоритм 15 Решение уравнения $b\operatorname{tg} x+c=d$

1. Найдите ОДЗ: $x\in R,\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.
2. Приведите исходное уравнение к виду $\operatorname{tg} x=a$.
3. Выберите нужную для решения формулу и запишите ее за чертой справа:

если $\operatorname{tg} x = a$, то $x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$;
если $\operatorname{tg} x = -a$, то $x = -\operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$;
если $\operatorname{tg} x = 0$, то $x = \pi k,\ k \in Z$.

(4) Согласуй корни с ОДЗ.

(5) Запишите ответ.



Решите уравнение.

1. $\operatorname{tg} x = 1{,}5$. 2. ЭМ. $3\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3} = 0$. 3. $\operatorname{tg} 6x = 0$.

Решение.

1. $x = \operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi k,\ k \in Z$.

2. 1) ОДЗ: $x \in R$ при $x \neq \frac{\pi}{4}(1+2k),\ k \in Z$

2) $3\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}\ |:3$

$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k,\ k \in Z$

$2x = \frac{\pi}{6} + \pi k\ |:2$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$

Корни входят в ОДЗ.

$y = \operatorname{tg} f(x)$ имеет смысл

при $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$

$\operatorname{tg} y = a$

$y = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$

Проверьте корни на ОДЗ:

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

Ответ: $\frac{\pi}{12}(1+6k),\ k \in Z$.

3. 1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$ при

$x \neq \frac{\pi}{12}(1+2k),\ k \in \boldsymbol{Z}$

$y = \operatorname{tg} f(x)$ имеет смысл при

$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \,\Big|\, :6,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

2) $\operatorname{tg} 6x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x = \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Корни входят в ОДЗ.

$\operatorname{tg} y = 0;\ y = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Проверьте корни на ОДЗ:

$\frac{\pi}{6}k \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k$

Ответ: $\frac{\pi}{6}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $3\operatorname{tg} 2x = 0$. **2.** $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$. **3.** $3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. **4.** $5\operatorname{tg} 0{,}6x = 2$.

Ответ: **1.** $\frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\frac{2}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \frac{5}{3}\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Алгоритм 16 Решение уравнения $b \operatorname{ctg} x + c = d$

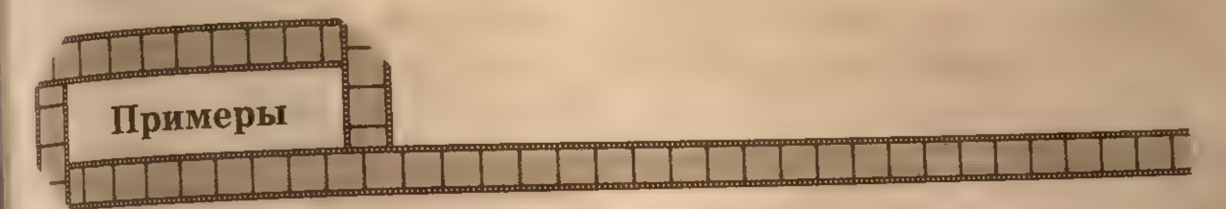
① ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$ при $x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

② Приведите исходное уравнение к виду $\operatorname{ctg} x = a$.

③ Выберите нужную для решения формулу и запишите ее за чертой справа:
если $\operatorname{ctg} x = a$, то $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$;
если $\operatorname{ctg} x = -a$, то $x = \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$;
если $\operatorname{ctg} x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

④ Согласуйте корни с ОДЗ.

⑤ Запишите ответ.



Решите уравнение.

1. $\operatorname{ctg} x = 10$. 2. $\operatorname{ctg} 2x = 0$. 3. $3\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{3}$.

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x \in R$ при $x \neq \pi k$, $k \in Z$
2) $\operatorname{ctg} x = 10 \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} 10 + \pi k$, $k \in Z$
Корни входят в ОДЗ.

| $\operatorname{ctg} x = a$ $(a > 0)$
| $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\operatorname{arcctg} 10 + \pi k$, $k \in Z$.

2. 1) ОДЗ: $x \in R$ при $x \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$
2) $\operatorname{ctg} 2x = 0$
$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \,\Big|\, :2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$
Корни входят в ОДЗ.

| если $\operatorname{ctg} y = 0$,
| то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$
| $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \neq \frac{\pi}{2}k$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(1 + 2k)$, $k \in Z$.

3\. 1) ОДЗ: $x \in R$ при $x \neq 2\pi k,\ k \in Z$

2) $-3\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{3}\ \big|:(-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{ctg}\frac{1}{2}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (рис. 40)

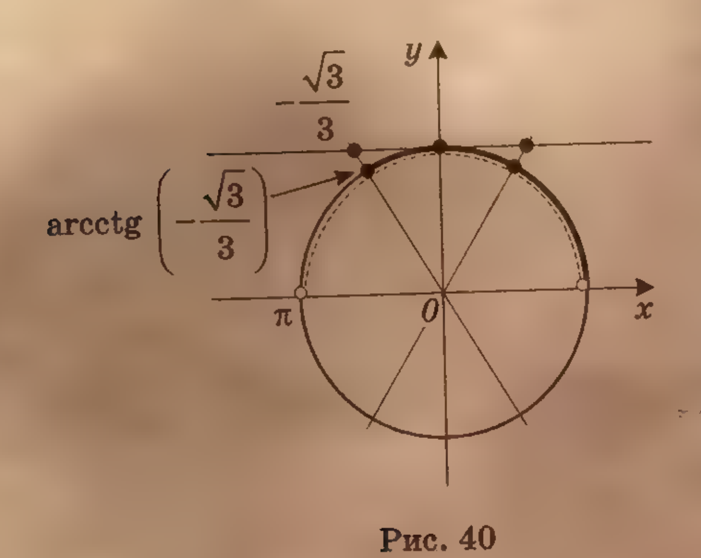


Рис. 40

ОДЗ: $x \in R$ при

$\frac{1}{2}x \neq \pi k\ \big|\cdot 2 \Leftrightarrow x \neq 2\pi k,\ k \in Z$

$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Приведем уравнение к виду $\operatorname{ctg} y = a$

если $\operatorname{ctg} y = -a$, то

$y = \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z$

$\pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

(см. таблицу на с. 322)

$\frac{4}{3}\pi + 2\pi k \neq 2\pi k$

Корни входят в ОДЗ.

$\frac{1}{2}x = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k,\ k \in Z$

$\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + \pi k\ \big|\cdot 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Замечания. 1. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет единственный корень на интервале $(0; \pi)$, равный $x_0 = \operatorname{arcctg} a,\ a \in R$, причем если $a \geq 0$, то $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

2\. Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$ можно привести к уравнению вида $\operatorname{tg} x = a$ по формуле $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, x \neq \frac{\pi}{2}k$.

Тригонометрические уравнения, изучаемые в школьном курсе

I. Уравнения, сводящиеся к квадратным:

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0;\quad a\cos^2 x + b\cos x + c = 0;\quad a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg} x + c = 0$$

II. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители, если правая часть равна нулю, например:

$$a(\sin x + b)(\cos x + c) = 0;\quad \mathrm{tg}\, x(\sin x + a) = 0$$

III. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$a\sin x + b\cos x = 0 \text{ (1-й степени)}$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \text{ (2-й степени)}$$

IV. Уравнения вида:

$$a\sin x + b\cos x = c$$

V. Уравнения вида:

$$\sin ax + \sin bx = \sin cx \text{ и } \cos ax + \cos bx = \cos cx$$

VI. Уравнения смешанных типов.

Алгоритм 17 **Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным (I)**

① Найдите ОДЗ.

② Приведите (если это возможно) все функции, входящие в уравнение, к одной функции, стоящей в 1-й степени, выбрав одну их формул:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha;\quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha;\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} \text{ и т. д.}$$

③ Приведите все функции к одному аргументу.

④ Введите нужную замену: $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\mathrm{tg}\, x = t$, $\sin^2 x = t^2$, $\cos^2 x = t^2$ или $\mathrm{tg}^2 x = t^2$.

⑤ Решите полученное квадратное уравнение $at^2+bt+c=0$ относительно t.

⑥ Решите одно из уравнений $\sin x = t$, или $\cos x = t$, или $\operatorname{tg} x = t$.

⑦ Согласуйте корни с ОДЗ.

⑧ Запишите ответ.



Примеры

1. ЭМ. Решите уравнение $\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$.

Решение.

1) ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$

2) Выразим $\cos x$ через $\sin x$:

$1 - \sin^2 x + 6\sin x - 6 = 0 \,|\cdot(-1)$

3) $\sin^2 x - 6\sin x + 5 = 0$

4) Пусть $\sin x = t$, $-1 \le t \le 1$

5) Решим уравнение

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$t_1 = 5$, $5 \notin [-1;1]$

$t_2 = 1$, $1 \in [-1;1]$

6) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$

$\sin x$ в 1-й степени

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$|\sin x| \le 1$

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1 \cdot t_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = 1 \end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2. ЭМ. Дана функция $f(x) = 2\sin^2 x - \cos x - 1$. Решите уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right]$.

Решение.

1) ОДЗ: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$.

2) Приведем все функции к одной функции:

$2\sin^2 x-\cos x-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$

cos x в 1-й степени

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$2-2\cos^2 x-\cos x-1=0 \,\big|\cdot(-1)$

3) $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

4) Пусть $\cos x=t$; $-1\le t\le 1$; $\cos^2 x=t^2$

$2t^2+t-1=0$

5) $\begin{cases}2t^2+t-1=0\\ t=\cos x\end{cases}$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}$

$t_1=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\in[-1;1]$

$t_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

$t_2=-1,\ -1\in[-1;1]$

$t_2=\frac{-1-3}{4}=-1$

6) $\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-1\end{array}\right.$

$x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$

$x_2=\pi+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$

$\cos x=m,\ x=\pm\arccos m+2\pi k,$ $k\in \mathbf{Z}$

$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

7) Согласуем корни с отрезком $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$:

а) пусть $k=0$, тогда $x_1=\pm\frac{\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$; $x_2=\pi$; $\pi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$

б) пусть $k=1$, тогда $x_3=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi$; $x_1\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$; $x_4=\pi+2\pi$;

$x_4\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; π.

З а м е ч а н и е. Чтобы определить, при каких значениях k корень x_0 входит в данный промежуток решения $[a; b]$, можно решить неравенство $a \le x_0 \le b$. Так, для решенного примера получим

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{3}{2}\pi \,\Big|\, -\frac{\pi}{3}; \quad -\frac{5}{6}\pi \le 2\pi k \le \frac{7}{6}\pi \,\Big|\, : 2\pi$$

$$-\frac{5}{12} \le k \le \frac{7}{12} \Rightarrow k = 0 \ (k \in Z)$$

Поэтому другие значения $k (k = \pm 1; \pm 2; \ldots)$ испытывать не надо.

Можно отобрать корни другим путем, перебирая значения $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots,$ пока не получим корни за пределами указанного промежутка.

3. ЭМ. Решите уравнение $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $2\cos^2 4x - 3(1 + \cos 4x) + 1 = 0$

$2\cos^2 4x - 3 - 3\cos 4x + 1 = 0$

3) $2\cos^2 4x - 3\cos 4x - 2 = 0$

4) Пусть $\cos 4x = t; -1 \le t \le 1$

5) $\begin{cases} 2t^2 - 3t - 2 = 0 \\ t = \cos 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = \cos 4x \end{cases}$

6) $\cos 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \,\Big|\, : 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, \ k \in Z$

Приведите функции к одному углу $(4x)$

$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} =$

$= \frac{3 \pm 5}{4}$

$t_1 = 2, \ t_2 = -\frac{1}{2}$

$t_1 \notin [-1; 1], \ t_2 \in [-1; 1]$

$\cos y = -a$

$y = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi k, \ k \in Z$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, \ k \in Z.$

4. ЭМ. Решите уравнение $2\sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $2\sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2 \Leftrightarrow$ | $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x = 1 + \sin 2x$

3) $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$

4) Пусть $\sin 2x = t$, $|t| \le 1$ | $2t^2 - t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$

5) $\begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1$

$t_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} t_1 = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \right.$

$\sin y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$\sin x = -a$

$x = (-1)^{k+1} \arcsin|-a| + \pi k,\ k \in Z$

$\arcsin\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$

6) $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \,|\, :2,\ n \in Z \\ 2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k \,|\, :2,\ k \in Z \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z \end{array} \right.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$.

5. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$, если $x \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

2) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x - 2\sqrt{3} = 0 \,\big|\cdot \operatorname{tg} x \neq 0$

$\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$

$\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$

$\operatorname{tg} x$ имеет смысл при

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg} x$ имеет смысл при

$x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$x \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

3) Пусть $\operatorname{tg} x = t$.

4) $\begin{cases} t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0 \\ t = \operatorname{tg} x,\ t \in \boldsymbol{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - \sqrt{3})^2 = 0 \\ t = \operatorname{tg} x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = \operatorname{tg} x \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

5) Корни $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, входят в ОДЗ.

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a = t,\ b = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$\frac{\pi}{3} + \pi k \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$. 2. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

Ответ: 1. $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n;\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

2. $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k,\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}$.



Решение тригонометрических уравнений разложением левой части уравнения на множители (II)

1. Найдите ОДЗ.
2. Перенесите все члены уравнения в левую часть.
3. Разложите левую часть уравнения на множители.
4. Приравняйте каждый множитель (не числовой) к нулю и решите полученные уравнения с учетом ОДЗ. Учтите, что $a \cdot b = 0$, если $a = 0$ и b при этом существует или $b = 0$ и a существует!
5. Запишите ответ.



1. Решите уравнение $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})\left(2\sin\frac{x}{3} + 1\right) = 0.$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Левая часть этого уравнения уже представлена в виде произведения множителей.

2) $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \\ 2\sin\frac{x}{3} + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \sin\frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \\ \frac{x}{3} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k \,\Big|\cdot 3,\ k \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{array}\right.$$

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$ на ОДЗ

$\sin y = -a \Rightarrow$

$\Rightarrow y = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg} x = m \Rightarrow x = \operatorname{arctg} m + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{— входит в ОДЗ} \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{2} + 3\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \text{— не входит в ОДЗ} \end{array} \right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

2. ЭМ. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = 3\sin 2x$ и $y = 4\cos x$.

Решение.

Чтобы найти абсциссы общих точек графиков данных функций, надо найти корни уравнения $3\sin 2x = 4\cos x$ (так как ординаты общих точек равны).

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$

2) $3\sin 2x = 4\cos x \Leftrightarrow 3\sin 2x - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\sin x\cos x - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x(3\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 3\sin x - 2 = 0 \\ x \in \boldsymbol{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \sin x = \dfrac{2}{3} \\ x \in \boldsymbol{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ x = (-1)^n \arcsin\dfrac{2}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \\ x \in \boldsymbol{R} \end{array} \right.$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ \text{ОДЗ} \end{array} \right.$$

$\sin x = a$

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$

$n \in \boldsymbol{Z}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ (-1)^n \arcsin\dfrac{2}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

3. ЕГЭ. Определите число корней уравнения

$$\operatorname{tg} x \cos 5x + \sin 5x = \sin 6x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right]$$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right]$, при

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0;\ 1,\quad x \neq \frac{\pi}{2};\quad x \neq \frac{3}{2}\pi$

tg x существует

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

2) $\frac{\sin x}{\cos x}\cos 5x + \sin 5x = \sin 6x \,\Big|\cdot \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x \cos 5x + \cos x \sin 5x = \sin 6x \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin 6x \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 6x - \sin 6x \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 6x(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$
$= \sin(\alpha + \beta)$

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$ на ОДЗ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 6x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2};\ x \neq \frac{3}{2}\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 6x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2};\ x \neq \frac{3}{2}\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}k \leq \frac{5}{3}\pi \,\Big|:\pi \\ 2\pi n \notin \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5}{3}\pi\right] \end{array}\right. \text{ при } n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ x \neq \frac{\pi}{2};\ x \neq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6}k \leq \frac{5}{3} \,\Big|\cdot 6 \\ \frac{\pi}{6}k \neq \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}k \neq \frac{3}{2}\pi \,\Big|\cdot\frac{6}{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq k \leq 10 \\ k \neq 3;\ k \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow k = 2;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 10$ — всего 7 корней

Ответ: уравнение имеет 7 корней на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right]$.

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $2\sin^2 x + \sin x = 0$

2. $\operatorname{tg} x \cdot \sin\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x = 0$

Ответ: **1.** $\pi k,\ k \in \mathbf{Z};\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **2.** $\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.



Решение однородных уравнений относительно $\sin x$ и $\cos x$ (III)

① Найдите ОДЗ.

② Приведите исходное уравнение к виду

$$a\sin x + b\cos x = 0 \text{ (1-й степени) или}$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \text{ (2-й степени)}$$

③ Разделите обе части уравнения 1-й степени на $\cos x \neq 0$, уравнения 2-й степени на $\cos^2 x \neq 0$.

④ Решите получившееся уравнение $\operatorname{tg} x = m$ (1-й степени) или уравнение $a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0$ (2-й степени).

⑤ Согласуйте корни с ОДЗ.

⑥ Запишите ответ.

Внимание! Обе части уравнения 1-й степени можно делить на $\cos x \neq 0$, а обе части уравнения 2-й степени — на $\cos^2 x \neq 0$, поскольку всякое значение x, для которого $\cos x = 0$, не является корнем данного уравнения, в противном случае и $\sin x = 0$, но это невозможно при одном и том же значении аргумента. (Если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.)



Решите уравнение (1–3).

1. ЭМ. $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$

2) $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \; \Big| : \cos^2 x \neq 0$

$6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$

3) Пусть $\operatorname{tg} x = t$, $t \in \mathbf{R}$, тогда:

$$\begin{cases} 6t^2 + t - 1 = 0 \\ t = \operatorname{tg} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \\ t = \operatorname{tg} x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{3} \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$$

$6t^2 + t - 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12}$$

$$t_1 = \frac{-1+5}{12} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{-1-5}{12} = -\frac{1}{2}$$

$\operatorname{tg} x = \pm a$

$x = \pm \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z};\ -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$



Если в правой части уравнения 2-й степени есть число n, то запишите его как $n(\sin^2 x + \cos^2 x) = n\sin^2 x + n\cos^2 x$, перенесите его в левую часть и решайте уравнение как однородное.

2. $4\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $4\cos^2 x - 2\sin x\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 0 \,\Big|\, : \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0 \,\Big|\, \cdot(-1) \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$

3) Пусть $\operatorname{tg} x = t$, $t \in R$, тогда:

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 3 = 0 \\ t = \operatorname{tg} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 1 \end{array}\right. \\ t = \operatorname{tg} x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -3 \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1 \cdot t_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$\operatorname{tg} x = -a$

$x = -\operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$

$\operatorname{tg} x = a$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$

$\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z$.

3. ЭМ. $9\cos^4 x - \sin^4 x = 2\sin^2 2x$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $9\cos^4 x - \sin^4 x - 2\sin^2 2x = 0$

$9\cos^4 x - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x -$

$-\sin^4 x = 0 \,\Big|\, : \cos^4 x \neq 0$

$9 - 8\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^4 x = 0$

$\operatorname{tg}^4 x + 8\operatorname{tg}^2 x - 9 = 0$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$(\sin 2x)^2 = 4\sin^2 x\cos^2 x$

однородное уравнение 4-й степени

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

3) Пусть $\operatorname{tg}^2 x = y,\ y \geq 0$

$$\begin{cases} y^2+8y-9=0 \\ y=\operatorname{tg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\operatorname{tg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1$

$x = \pm\operatorname{arctg} 1 + \pi k,\ k \in Z$

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$$\begin{cases} y_1+y_2=-8 \\ y_1 \cdot y_2=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \neq -9, \text{ т. к. } y>0 \\ y=1 \end{array}\right.$$

$\operatorname{tg} x = \pm a$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

$\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

4. ЭМ. Найдите все решения уравнения $\dfrac{2\cos x + \sin x}{\cos x - 7\sin x} = -\dfrac{1}{2}$ **на отрезке** $[-\pi; \pi]$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$ при

$x \neq \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7} + \pi k,\ k \in Z$

2) $(2\cos x + \sin x) \cdot 2 = -(\cos x - 7\sin x)$

$4\cos x + 2\sin x + \cos x - 7\sin x = 0$

$5\cos x - 5\sin x = 0 \,|\, : 5\cos x \neq 0$

$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

3) Отберем корни $x_0 \in [-\pi; \pi]$.

1) $\cos x = 7\sin x \,|\, : \cos x \neq 0$

$7\operatorname{tg} x = 1;\ \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{7}$

$x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7} + \pi k,\ k \in Z$

2) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

$-\pi$, $-\dfrac{3}{4}\pi$, 0, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{\pi}{4}$, π, x

Найдем n:

$-\pi \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n \leq \pi \,\Big|\, -\dfrac{\pi}{4};\quad -\dfrac{5}{4}\pi \leq \pi n \leq \dfrac{3}{4}\pi;\quad -\dfrac{5}{4} \leq n \leq \dfrac{3}{4} \Rightarrow n = -1;\ 0\ (n \in Z)$

Если $n = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4} \in [-\pi; \pi]$.

Если $n = -1$, то $x = \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{3}{4}\pi;\ -\dfrac{3}{4}\pi \in [-\pi; \pi]$.

Ответ: $-\dfrac{3}{4}\pi;\ \dfrac{\pi}{4}$.

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $2\sin 2x = 3\cos 2x$
2. $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$

Ответ: **1.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$. **2.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Алгоритм 20 Решение уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ (IV)

I способ (через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$).

① Найдите ОДЗ.

② Замените в данном уравнении $\sin x$ на $\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x$ на $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, где $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $x \neq \pi(1+2n),\ n \in Z$.

③ Решите получившееся уравнение относительно t: найдите корни.

④ Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

⑤ Проверьте корни по ОДЗ, т. е. исключите значения $x = \pi(1+2n),\ n \in Z$.

⑥ Запишите ответ.

II способ $\left(\text{если } \frac{a}{b} = 1;\ \sqrt{3};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

① Найдите ОДЗ.

② Разделите обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$.

③ В полученном уравнении

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ выполните замену:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi, \text{ если } \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi, \text{ если } \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$$

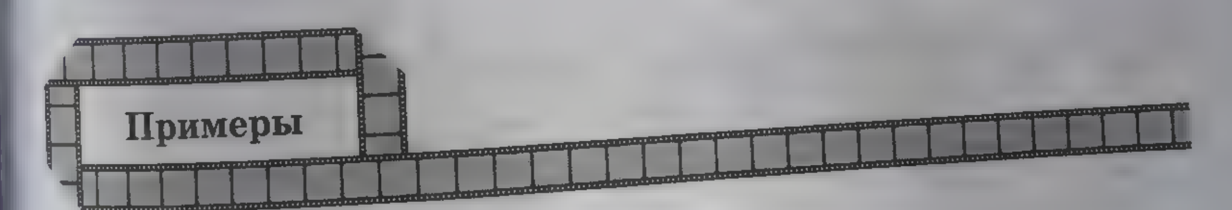
④ Найдите φ по таблице или через $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, считая, что $\varphi\in[0;2\pi]$, $\varphi\ne\frac{\pi}{2}$; $\varphi\ne\frac{3}{2}\pi$.

⑤ Решите уравнение $\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

$$\sin(\varphi+x)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$$

⑥ Запишите ответ: $(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.



Решите уравнение (1–2).

1. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$. 2. $2\sin 2x+3\cos 2x=2$.

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x\in\mathbf{R}$

2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\,\big|:2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1\Leftrightarrow$

$a\sin x+b\cos x=c$

$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

применяем II способ

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=2$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$

$\sin y=1 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

2. 1) ОДЗ: $x\in R$

2) Пусть $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\frac{a}{b}\neq 1,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

применяем I способ

$t=\operatorname{tg} x;\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

3) Тогда

$$\begin{cases}\frac{2\cdot 2t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}=2\ \Big|\cdot(1+t^2)\\ t=\operatorname{tg} x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4t+3-3t^2=2+2t^2\\ t=\operatorname{tg} x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5t^2-4t-1=0\\ t=\operatorname{tg} x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\ t=\operatorname{tg} x\end{cases} \text{ или } \begin{cases}t=-\frac{1}{5}\\ t=\operatorname{tg} x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1\\ \operatorname{tg} x=-\frac{1}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\\ x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

Корни входят в ОДЗ.

$ax^2+bx+c=0,$

если $a+b+c=0,$

то $x_1=1,\ x_2=\frac{c}{a}$

$5-4-1=0$, то

$t_1=1,\ t_2=-\frac{1}{5}$

$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$

Проверим $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$:

$2\sin\pi+3\cos\pi=2\Rightarrow -3=2$ — ложно.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k,\ k\in Z.$

Замечание. Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ можно начать решать заменой $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ и $c=c\sin^2\frac{x}{2}+c\cos^2\frac{x}{2}$. Применив преобразования, получим уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}$. 2. $6\sin x+5\cos x=6$.

Ответ: 1. $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z.$

2. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+2\pi n,\ n\in Z.$

Алгоритм 21 Решение уравнений $\cos ax+\cos bx=\cos cx$ и $\sin ax+\sin bx=\sin cx$ (V)

① Найдите ОДЗ.
② Перенесите все члены уравнения в одну часть уравнения.
③ Сгруппируйте два члена уравнения так, чтобы, применив одну из формул $\cos\alpha\pm\cos\beta$ и $\sin\alpha\pm\sin\beta$, получить множитель с аргументом, таким же, как у третьего члена уравнения.
④ Вынесите за скобки общий множитель.
⑤ Решите полученное уравнение, учитывая ОДЗ.
⑥ Запишите ответ.



Решите уравнение (1–2).

1. $\cos x + \cos 3x = 4\cos 2x$. 2. ЭМ. $\sin 5x = \sin x + \sin 2x$.

Решение.

1. 1) ОДЗ: $x \in R$

2) $(\cos x + \cos 3x) - 4\cos 2x = 0$

3) $2\cos 2x \cdot \cos x - 4\cos 2x = 0$

4) $2\cos 2x(\cos x - 2) = 0$

| $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

| $a \cdot b = 0$, если $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$ на ОДЗ

| $|\cos x| \le 1$

5) $\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \,\big|\, :2 \\ \cos x = 2 \text{ – нет решений} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$.

2. 1) ОДЗ: $x \in R$

2) $(\sin 5x - \sin x) - \sin 2x = 0$

3) $2\sin 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x = 0$

4) $\sin 2x(2\cos 3x - 1) = 0$

5) $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 3x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n,\ n \in Z \\ 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \,\big|\, :3,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z \\ x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

Корни входят в ОДЗ.

Ответ: $\frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in Z$.

| $\sin\alpha - \sin\beta =$

| $= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

| $a \cdot b = 0$, если $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$ на ОДЗ

| $2\cos 3x - 1 = 0$

| $\cos 3x = \frac{1}{2}$

| $\cos y = m$

| $y = \pm\arccos m + 2\pi n$, $n \in Z$

Проверь себя!

Решите уравнение.

1. $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$

2. $\cos 5x\cdot\cos x=\cos 4x$ (примените формулу для произведения $\cos\alpha\cdot\cos\beta$)

Ответ: **1.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $\frac{\pi}{5}k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Решение тригонометрических уравнений смешанных типов (VI)

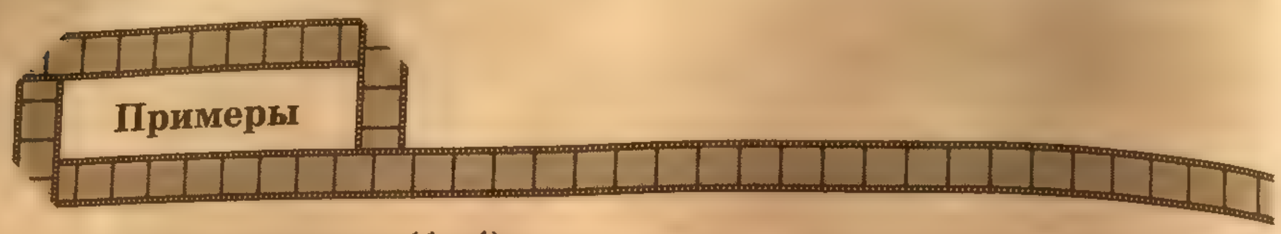
Единого алгоритма решения уравнений смешанных типов не существует, но можно преобразованиями привести данное уравнение к одному из стандартных типов (I–V).

Полезный совет

1. Найдите в Приложении формулу, позволяющую преобразовать сумму в произведение или произведение в сумму и сгруппировать члены уравнения (запишите ее за чертой), и примените ее.

Например: в уравнении $\sin x+\sin 3x-\cos x=0$ ясно, что можно сгруппировать $\sin x+\sin 3x$, значит, найдите формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ и т. д. Аналогично рассуждая, приведите, если надо, функции к одному аргументу по формулам двойного угла или по формулам, понижающим степень: $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ или $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

2. Желательно левую часть разложить на множители, а правую сделать равной нулю.



Решите уравнение (1–4).

1. $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$

Решение.

1) ОДЗ: $x\in R$

2) $4\sin 3x+\sin 5x-$

$$-2\cdot\frac{1}{2}(\sin(-x)+\sin 3x)=0$$

$4\sin 3x+\sin 5x-(-\sin x+\sin 3x)=0$

$4\sin 3x+\sin 5x+\sin x-\sin 3x=0$

$3\sin 3x+(\sin 5x+\sin x)=0$

$3\sin 3x+2\sin 3x\cos 2x=0$

$\sin 3x(3+2\cos 2x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \cos 2x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\pi n,\ n\in Z\\ \text{нет решений}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$$

$\sin\alpha\cos\beta=$

$$=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$a\cdot b=0$, если $\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.$ на ОДЗ

$3+2\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x=-\frac{3}{2}$

$|\cos x|\le 1$

Ответ: $\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z.$

2. ЭМ. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$

Можно решать двумя способами:

I способ. Перенесите все члены в одну часть и сгруппируйте, а затем примените формулу разности квадратов, получите сумму и разность тригонометрических функций и т. д.

II способ. Умножьте обе части уравнения на 2 и примените формулу $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$. Второй путь короче.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x \,\big|\, \cdot 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 3x + 2\sin^2 4x = 2\sin^2 5x + 2\sin^2 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x = 1 - \cos 10x + 1 - \cos 12x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x - \cos 10x - \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 6x - \cos 10x) + (\cos 8x - \cos 12x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 8x \sin 2x + 2\sin 10x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin 8x + \sin 10x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot 2\sin\frac{8x+10x}{2} \cdot \cos\frac{8x-10x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 2x \cdot \sin 9x \cdot \cos(-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 9x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi k,\ k \in Z \\ 9x = \pi n,\ n \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{9}n,\ n \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{9}n,\ n \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Решение $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$ входит в решение $x = \dfrac{\pi}{2}k$ при $k = 2m+1,\ m \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{9}n,\ n \in Z;\ \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z.$

3. ЭМ. $4^{|x-2|\sin x}=2^{x|\sin x|}$

Решение.

1) ОДЗ: $x\in R$

2) $2^{2|x-2|\sin x}=2^{x|\sin x|}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2|x-2|\sin x=x|\sin x|$

$a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}\underset{\substack{a>0\\a\neq 1}}{\Rightarrow} f(x)=\varphi(x)$

3) Решим уравнение с модулем:

а) найдем корни выражений под знаком модуля: $x-2=0\Rightarrow x=2$; $\sin x=0\ \Rightarrow x=\pi k,\ k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$;

б) отметим на оси Ox корни и промежутки, на которые они разбивают ось.

4) Определим знаки выражений под знаком модуля на каждом промежутке. Рассмотрим промежутки $[-\pi;0]$; $(0;2]$; $(2;\pi]$; $(\pi;2\pi]$ (на следующих промежутках знаки повторяются).

знаки $\sin x$: + | $-\pi$ | − | 0 | + | 2 | + | π | − | 2π | +

знаки $x-2$: − | $-\pi$ | − | 0 | − | 2 | + | π | + | 2π | +

5) Раскроем модуль $\left(|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\geq 0\\ -a, \text{ если } a<0\end{cases}\right)$ в уравнении $2|x-2|\sin x=$ $=x|\sin x|$ на каждом промежутке и решим его.

а) $-\pi\leq x\leq 0$; $(-;-)$ — знаки $x-2$ и $\sin x$ соответственно

$2(2-x)\sin x=-x\sin x\Leftrightarrow 4\sin x-2x\sin x+x\sin x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin x-x\sin x=0\Leftrightarrow \sin x(4-x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\4-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in Z\\x=4\end{array}\right.\\-\pi\leq x\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\pi\\x=0\end{array}\right.$

б) $0<x\leq 2$; $(-;+)$

$2(2-x)\sin x=x\sin x\Leftrightarrow 4\sin x-2x\sin x-x\sin x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin x-3x\sin x=0\Leftrightarrow \sin x(4-3x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4-3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ x=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\\ 0<x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

в) $2<x\le\pi$; $(+;+)$

$2(x-2)\sin x = x\sin x \Leftrightarrow 2x\sin x-4\sin x-x\sin x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\sin x-4\sin x=0\Leftrightarrow \sin x(x-4)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ x=4\end{array}\right.\\ 2<x\le \pi\end{cases} \Leftrightarrow x=\pi$$

г) $\pi<x\le 2\pi$; $(+;-)$

$2(x-2)\sin x = -x\sin x \Leftrightarrow 2x\sin x-4\sin x+x\sin x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x\sin x-4\sin x=0\Leftrightarrow \sin x(3x-4)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 3x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ x=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\\ \pi<x\le 2\pi\end{cases} \Leftrightarrow x=2\pi$$

6) Выберем из всех случаев ответ: $x=\frac{4}{3}$ и $x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$; $\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Полезный совет

Чтобы применить нужную формулу, иногда полезно умножить левую и правую части уравнения на $f(x)\neq 0$.

4. $\cos 2x\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}=\frac{1}{16}$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

2) $\cos 2x \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} = \frac{1}{16} \quad \Big| \cdot 16 \sin \frac{x}{4}$

$$16 \cos 2x \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4} \right) = \sin \frac{x}{4}$$

$$8 \cos 2x \cdot \cos x \left(\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \right) = \sin \frac{x}{4}$$

$$4 \cos 2x (\cos x \sin x) = \sin \frac{x}{4}$$

$$2 \cos 2x \sin 2x = \sin \frac{x}{4}$$

$$\sin 4x = \sin \frac{x}{4}$$

$$\sin 4x - \sin \frac{x}{4} = 0$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\left(4x - \frac{x}{4}\right) \cos \frac{1}{2}\left(4x + \frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin \Big(\underbrace{2x - \frac{x}{8}}_{u}\Big) = 0 \\ &\cos \Big(\underbrace{2x + \frac{x}{8}}_{t}\Big) = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2x - \frac{x}{8} = \pi k, \ k \in Z \\ &2x + \frac{x}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{8}{15}\pi k, \ k \in Z \\ &x = \frac{4}{17}\pi(1 + 2n), \ n \in Z \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\frac{8}{15}\pi k, \ k \in Z; \ \frac{4}{17}\pi(1 + 2n), \ n \in Z.$

Умножим обе части уравнения на $16 \sin \frac{x}{4}$

$16 \sin \frac{x}{4} \neq 0$

$\frac{x}{4} \neq \pi k, \ x \neq 4\pi k, \ k \in Z$

$x = 4\pi k$ — не является корнем

$2 \cos \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{4} = \sin \frac{x}{2}$

по формуле

$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

$\sin \alpha - \sin \beta =$

$= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\sin u = 0 \Rightarrow u = \pi k, \ k \in Z$

$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + \pi n,$

$n \in Z$

$\frac{15x}{8} = \pi k \ \Big| \cdot \frac{8}{15}$

$x = \frac{8}{15}\pi k$

$\frac{17}{8} x = \frac{\pi}{2}(1 + 2n) \ \Big| \cdot \frac{8}{17}$

$x = \frac{4}{17}\pi + \frac{8}{17}\pi n, \ n \in Z$

Решение уравнений с помощью использования свойства ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$ покажем на примере.



Решите уравнение $\sin x + 2\sin 5x - 4 = -\cos 4x$.

Решение.

$\sin x + 2\sin 5x - 4 = -\cos 4x \Leftrightarrow \sin x + 2\sin 5x + \cos 4x = 4$ — решение возможно, если $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Проверим эти корни для других уравнений системы.

$\sin 5\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \sin\left(\dfrac{5}{2}\pi + 10\pi n\right) = 1$ — истина

$\cos 4\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \cos(2\pi + 8\pi n) = 1$ — истина

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Проверь себя!

Решите уравнение $\cos x + \cos^2 2x - \sin^4 4x = 3$.

Ответ: нет корней.

Попробуй не реши!

Решите уравнение.

1. $\sin^2 x + \sin x = 0$

2. $\cos x - \cos 2x - \sin 3x = 0$

3. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

4. $\sin 2x = 3\sin x \cos^2 x$

Ответ: 1. $\pi k,\ k \in Z;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. 2. $\frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z;$ $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. 3. $\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$. 4. $\pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

Попробуй-ка реши!

1. Решите уравнение:

1) ЭМ. $\operatorname{tg} x(1 - 2\sin x) - 2\cos x = \sqrt{3}$

2) $\sin\frac{\pi}{2}x = x^2 - 2x + 2$

Подсказка. 1) Умножьте на $\cos x$ обе части уравнения. 2) Оцените правую часть уравнения.

2. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4\sin 3x \times \times 2\sin x + 2\cos 2x + 1 = 0$.

Ответ: 1. 1) $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$; 2) 1. 2. $\frac{\pi}{3}$.

Алгоритм 22. Графическое решение тригонометрического уравнения

① Найдите ОДЗ.

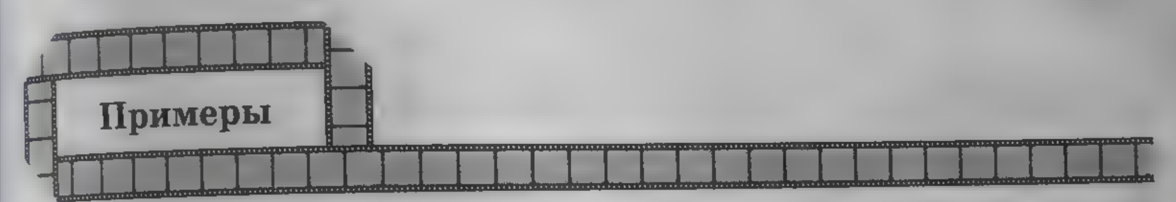
② Приведите уравнение к одному из видов $\sin kx = f(x)$, $\cos kx = f(x)$ или $\operatorname{tg} kx = f(x)$ (если оно записано в другом виде).

③ Постройте графики функций (левая и правая части уравнения) в одной системе координат.

④ Найдите абсциссы точек пересечения графиков (опустите перпендикуляры из точек пересечения на ось Ox и запишите получившиеся значения x_k).

⑤ Запишите ответ.

З а м е ч а н и е. Если графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, не имеют общих точек, то уравнение не имеет решения.



Решите графически уравнение **(1–4)**.

1. $\sin x = \frac{1}{2}x$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$.

2) Уравнение уже записано в виде $\sin kx = f(x)$.

3) Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}x$ (рис. 41).

4) $x_1 \approx 1,9$; $x_2 \approx -1,9$

Ответ: $\approx -1,9$; $\approx 1,9$.

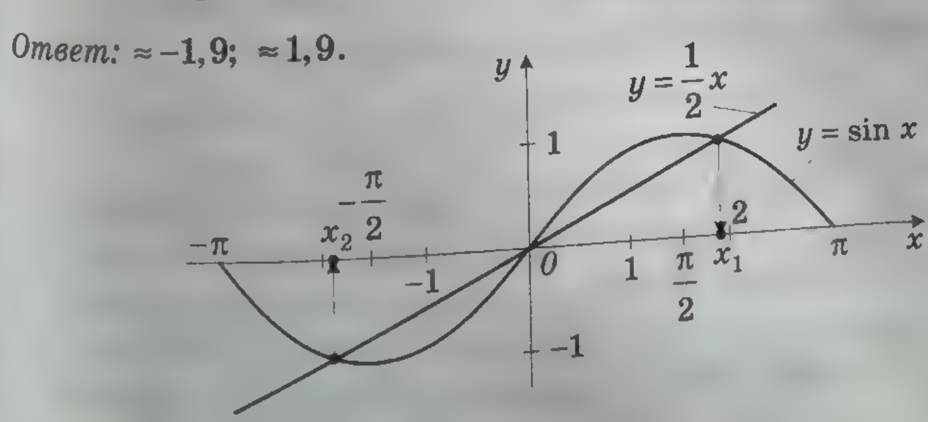


Рис. 41

2. $\cos x = 3x - 1$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$.

2) Уравнение уже записано в виде $\cos kx = f(x)$.

3) Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$ (рис. 42).

4) $x_0 \approx 0{,}6$

Ответ: $\approx 0{,}6$.

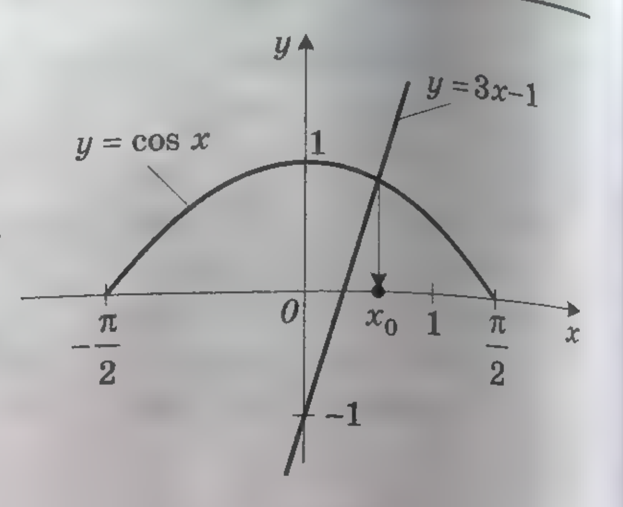


Рис. 42

3. $\cos x = \sqrt{x}$

Решение.

1) ОДЗ: $[0; +\infty)$.

2) Функции записаны в виде, удобном для построения графиков.

3) Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = \sqrt{x}$.

4) $x_0 \approx 0{,}7$ (рис. 43)

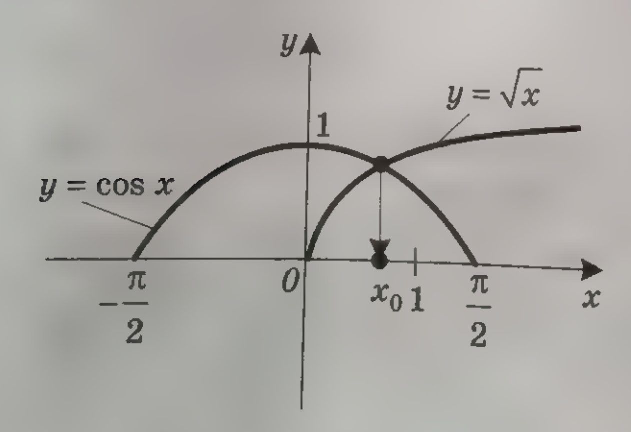


Рис. 43

Ответ: $\approx 0{,}7$.

4. $\cos x = x^2$

Решение.

1) ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$.

2) Функции записаны в виде, удобном для построения графиков.

3) Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = x^2$.

4) $x_0 \approx 0{,}8$, $x_1 = -x_0 \approx -0{,}8$ (рис. 44)

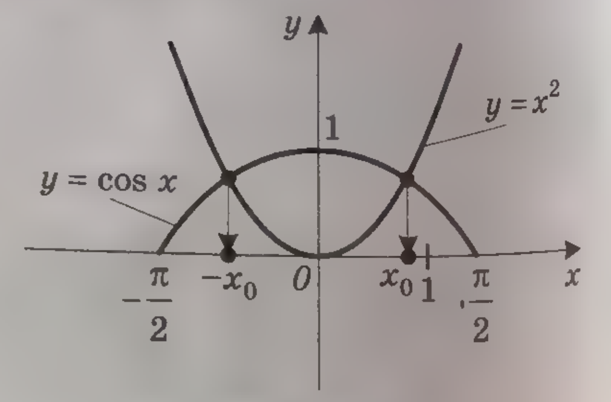


Рис. 44

Ответ: $\approx \pm 0{,}8$.

5. Используя график синуса, найдите все корни уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-\pi; 3\pi]$.

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$; $[-\pi; 3\pi] \subset \boldsymbol{R}$.

2) Уравнение уже записано в виде $\sin x = f(x)$.

3) Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Найдем абсциссы точек пересечения графиков (рис. 45).

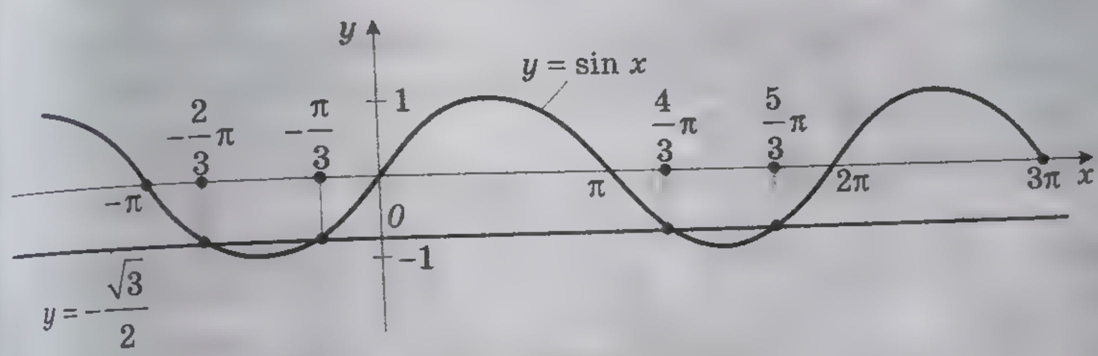


Рис. 45

Ответ: $-\frac{2}{3}\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$.

§ 4 Решение тригонометрических неравенств

Определение. Неравенство, в котором переменная стоит под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

Решением тригонометрического неравенства являются промежутки чисел (углов) в радианах (градусах).

Неравенство считается решенным, если найдены все решения или доказано, что решения нет.

Алгоритм 23 Решение простейших тригонометрических неравенств: $\sin x \gtreqless a$; $\cos x \gtreqless a$; $\operatorname{tg} x \gtreqless a$

① Найдите ОДЗ и изобразите не входящие в ОДЗ значения x на единичной окружности кружочком (○), *например* для $\operatorname{tg} x \gtreqless a$ — это $\pm\frac{\pi}{2}$, для $\operatorname{ctg} x \gtreqless a$ — это 0; π.

② Изобразите значения a на соответствующей оси точкой в зависимости от знака неравенства: если знак $\le$ или $\ge$, то (●); если знак $>$ или $<$, то (○).

③ Выделите промежуток значений a на соответствующей оси ($\sin x \gtreqless a$ на оси Oy; $\cos x \gtreqless a$ на оси Ox; $\operatorname{tg} x \gtreqless a$ на оси тангенсов; $\operatorname{ctg} x \gtreqless a$ на оси котангенсов).

Например (рис. 46):

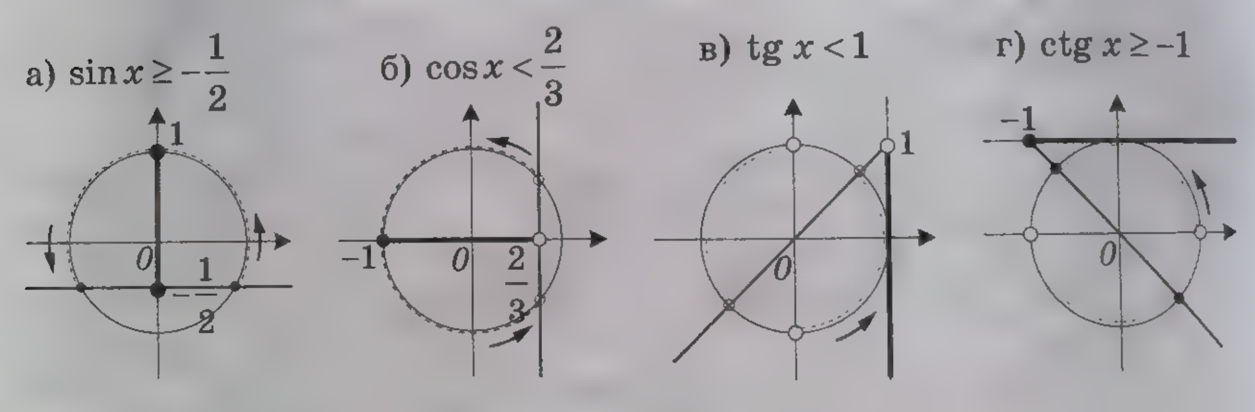


Рис. 46

④ Для синуса и косинуса проведите прямую, параллельную оси Ox или Oy, через точку a на соответствующей оси координат. Для тангенса и котангенса — через точку a на оси тангенсов и котангенсов и точку (0; 0) до пересечения с окружностью.

⑤ Отметьте точки пересечения прямой (проведенной в п. 4) с окружностью ((●) или (○)).

⑥ Выделите на окружности дугу — решение неравенства, все точки которой удовлетворяют неравенству.

⑦ Поставьте стрелки ↺ (против часовой стрелки), указывающие направление от меньшего угла к большему.

⑧ Назовите меньшее (x_1) и большее (x_2) значение угла:

I четверть: α или $\alpha+2\pi$

II четверть: $-(\pi+\alpha)$ или $\pi-\alpha$

III четверть: $-(\pi-\alpha)$ или $\pi+\alpha$

IV четверть: $-\alpha$ или $2\pi-\alpha$

⑨ Запишите решение двойным неравенством.

Например: $x_1 < x < x_2$, если $x_1 < x_2$

⑩ Прибавьте к левой и правой части неравенства Tk, $k \in Z$, где T — период для данной функции.

⑪ Запишите ответ.

Замечания. 1. Одна и та же точка окружности может соответствовать двум числам — меньшему и большему, стрелки ○ помогут сделать выбор.

2. Название осей не пишите, так как число x относится к окружности.



Решите неравенство (1–3).

1. $\cos x \le \frac{1}{2}$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.

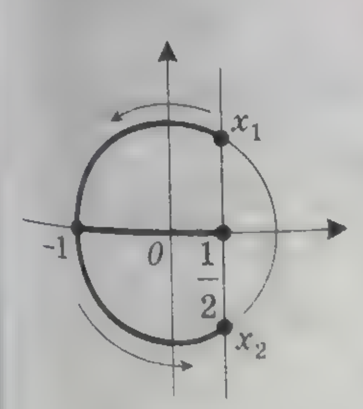


Рис. 47

2) Изобразим окружность ($R = 1$) и значение $a = \frac{1}{2}$ точкой (●) на оси Ox (рис. 47).

3) Выделим значения a, удовлетворяющие условию: отрезок $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ на оси Ox.

4) Проведем прямую $x = \frac{1}{2}$.

5) Отметим на окружности точки (●) x_1 и x_2.

6) Отметим на окружности дугу, все точки которой удовлетворяют неравенству.

7) Поставим стрелки ↻.

8) $x_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; x_2 в IV четверти (большее), значит, $x_2 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

9) Запишем решение: $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$.

10) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ | Для $y = \cos x$ период $T = 2\pi$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right],\ k \in Z$.

2. $4\sin x\cos x \le \sqrt{2}$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$.

2) Упростим неравенство:

$4\sin x\cos x \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sin 2x \le \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = 2x \end{cases}$

| $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$
| $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1,4}{2} \approx 0,7$
| Пусть $2x = t$

3)–7) Решим неравенство (рис. 48).

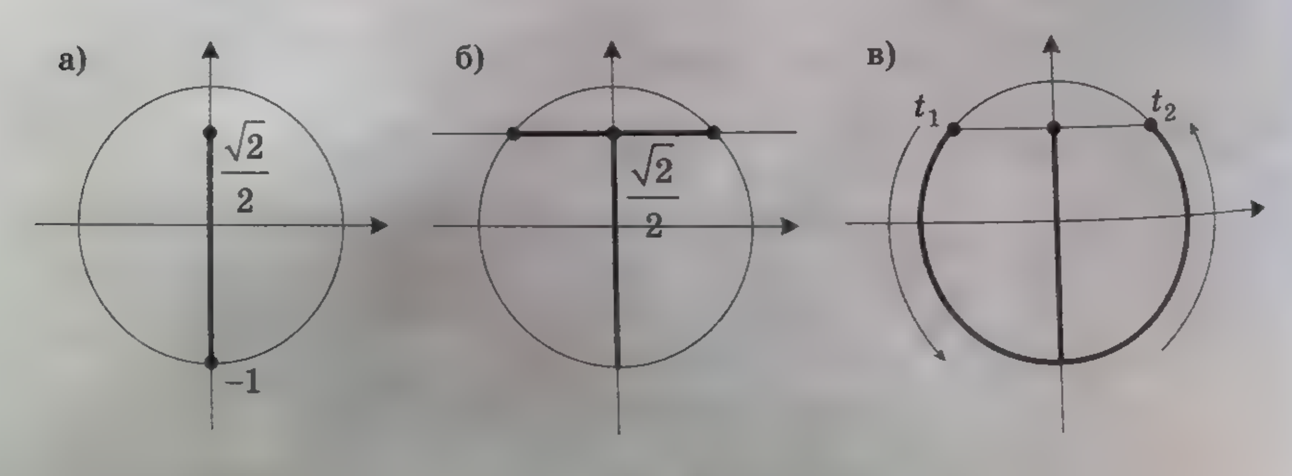


Рис. 48

8) t_1 во II четверти — меньший угол, значит, $-(\pi+\alpha)$, $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

$t_1 = -\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5}{4}\pi$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$ (в I ч.).

9) $\begin{cases} 2\pi k - \frac{5}{4}\pi \le t \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z} \\ t = 2x \end{cases} \Leftrightarrow 2\pi k - \frac{5}{4}\pi \le 2x \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k \ \big| :2, \ k \in \mathbf{Z}$

$\pi k - \frac{5}{8}\pi \le x \le \frac{\pi}{8} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}$

Ответ: $\left[\pi k - \frac{5}{8}\pi; \ \frac{\pi}{8} + \pi k\right], \ k \in \mathbf{Z}.$

Замечание. Можно было угол t_1 назвать $\pi - \alpha$, т. е. $\frac{3}{4}\pi$, но тогда угол $t_2 = \alpha + 2\pi$, т. е. $t_2 = \frac{9}{4}\pi$.

3. $\operatorname{ctg} x < 2$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$ при $x \neq \pi k, \ k \in \mathbf{Z}$.

2) Изобразим окружность ($R = 1$) и на ней ОДЗ (рис. 49). Остальные пункты алгоритма выполним на рисунке, запишем решение $\operatorname{arcctg} 2 < x < \pi$ и прибавим $\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$, к левой и правой частям. Затем запишем все решения неравенства: $\operatorname{arcctg} 2 + \pi k < x < \pi + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $(\operatorname{arcctg} 2 + \pi k; \ \pi + \pi k), \ k \in \mathbf{Z}$.

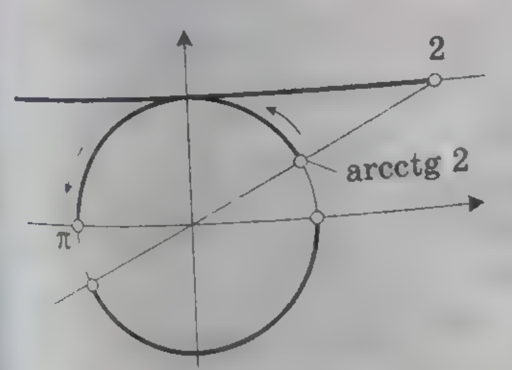


Рис. 49

4. ЭМ. Дана функция $f(x) = (\operatorname{tg} x + 1)(2\cos x - 1)$. Решите неравенство $\frac{f(x)}{2\cos x - 1} < 0$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

Решение.

Вместо $f(x)$ подставьте его выражение в неравенство

$$\frac{(\operatorname{tg} x + 1)(2\cos x - 1)}{2\cos x - 1} < 0$$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 2\cos x - 1 \neq 0 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \\ x \in [-\pi; 0] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \\ x \in [-\pi; 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{3} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Дробь $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл при $b \neq 0$

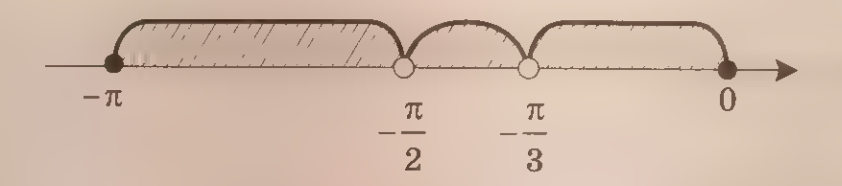
tg x имеет смысл при $x \in R$,

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$2\cos x - 1 \neq 0$

$\cos x \neq \dfrac{1}{2}$

$x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$



Так как $2\cos x - 1 \neq 0$, то дробь можно сократить:

$$\frac{(\operatorname{tg} x + 1)(2\cos x - 1)}{(2\cos x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + 1 < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x < -1 \text{ (рис. 50)}$$

Изобразим ОДЗ на окружности $\left(\text{промежуток } [-\pi; 0] \text{ и точки } -\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2) Изобразим на оси тангенсов $a = -1$ кружочком (○).

3) Выделим значение $a < -1$ на оси тангенсов (вниз).

4) Проведем прямую через точки O (0; 0) и (1; −1).

5) Отметим точку пересечения прямой с окружностью кружочками (○) на промежутке $[-\pi; 0]$.

6) Выделим дугу на окружности, входящую в промежуток $[-\pi; 0]$.

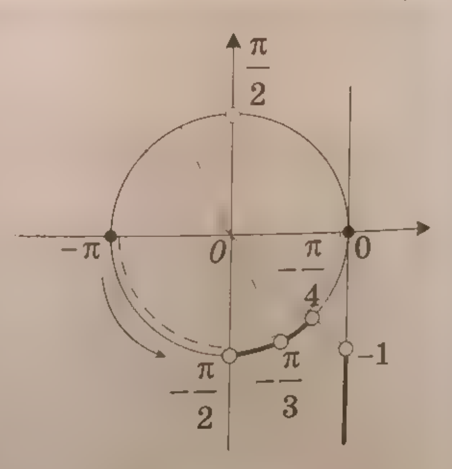
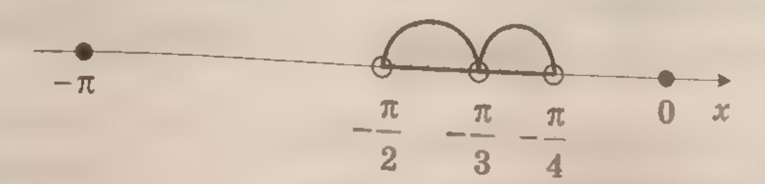


Рис. 50

7) Поставим стрелки ↻.

8) Решение на числовой оси:



9) Запишем решение: $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Проверь себя!

Решите неравенство.

1. $2\sin x \le -1$. **2.** $3\operatorname{tg} 2x \ge -\sqrt{3}$.

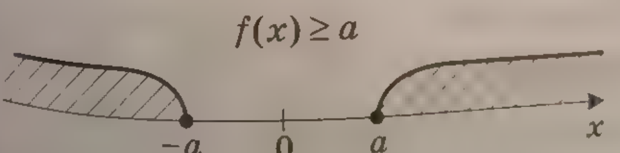
Ответ: **1.** $\left[-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. **2.** $\left[-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right)$, $k \in Z$.

Алгоритм 24 **Решение тригонометрических неравенств с модулем: $|\sin x| \gtrless a$; $|\cos x| \gtrless a$; $|\operatorname{tg} x| \gtrless a$**

① Найдите ОДЗ.

② Решите неравенство, учитывая, что:

если $|f(x)| \ge a$, то $f(x) \le -a$ или $f(x) \ge a$



если $|f(x)| < a$, то $-a < f(x) < a$

$-a$ 0 a x

③ Если аргумент отличен от x (имеет более сложный вид), то обозначьте его, *например*, буквой t и решайте далее неравенство относительно t.

④ Найдите решение неравенства на окружности (выделите дугу).
⑤ Поставьте стрелки ↻ от меньшего угла к большему.
⑥ Назовите меньший и больший углы и запишите решение неравенства.
⑦ Прибавьте к каждому значению решения Tn, $n \in \mathbf{Z}$, чтобы найти все множество решений (T — период).
⑧ Найдите x и согласуйте решение с ОДЗ.
⑨ Запишите ответ.



Решите неравенство (1–2).

1. $|\text{tg}\, 5x| \le \sqrt{3}$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$ при $5x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n \mid :5$

$x \ne \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n,\ n \in \mathbf{Z}$

tg(kx) имеет смысл при

$kx \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$

$k = 5$

2) Обозначим $\text{tg}\, 5x = f(x)$, решим неравенство $|f(x)| \le \sqrt{3}$:

$$-\sqrt{3} \le f(x) \le \sqrt{3}$$

3) Пусть $5x = t$, тогда решаем неравенство $|\text{tg}\, t| \le \sqrt{3}$, используя ось тангенсов (рис. 51).

4) Найдем решение неравенства $|\text{tg}\, t| \le \sqrt{3}$ на окружности (проведем прямые через точки $(0;\ 0)$, $(1; \sqrt{3})$, а также $(0;\ 0)$ и $(1; -\sqrt{3})$, выделим дуги $[t_1; t_2]$ и $[t_3; t_4]$.

5) Поставим стрелки ↻ на окружности.

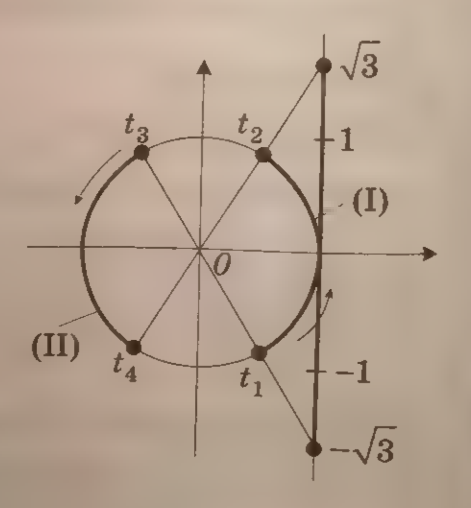


Рис. 51

6) Меньшее число $t_1 = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ (в IV ч.), большее число $t_2 = +\frac{\pi}{3}$, запишем решение неравенств:

$$-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3} \text{ (I) и } \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3} \text{ (II)}$$

Второй промежуток получается из (I) прибавлением π.

7) Прибавим πk, $k \in Z$, к каждому значению t ($T = \pi$ для $y = \operatorname{tg} x$):

$$\pi k - \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z$$

Найдем x:

$$\pi k - \frac{\pi}{3} \le 5x \le \frac{\pi}{3} + \pi k \Leftrightarrow \frac{\pi}{5}k - \frac{\pi}{15} \le x \le \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}k, \ k \in Z$$

8) Согласуем решение с ОДЗ.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{5}k - \frac{\pi}{15}; \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}k\right]$, $k \in Z$, или в другой записи $\left[\frac{\pi}{15}(3k-1); \frac{\pi}{15}(3k+1)\right]$, $k \in Z$.

2. $\left|\cos\frac{1}{2}x\right| > \frac{1}{2}$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in R$

если $|f(x)| > a$, то $\left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$

2) Пусть $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = f(x)$, тогда $|f(x)| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \frac{1}{2} \\ f(x) < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Покажем решение на оси Ox.

3) Пусть: $\begin{cases} \frac{1}{2}x = t \\ \left[\begin{array}{ll} \cos t > \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos t < -\frac{1}{2} & \text{(II)} \end{array}\right. \end{cases}$

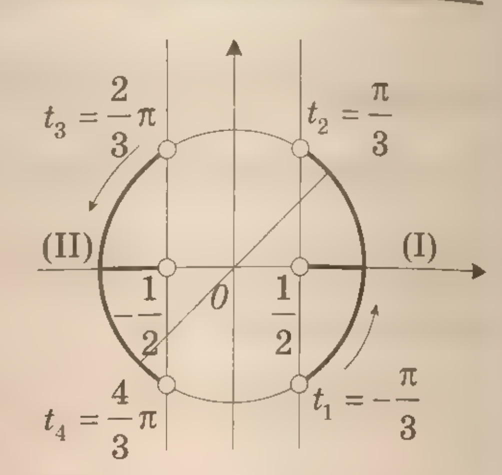
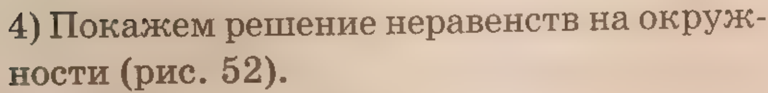


Рис. 52



4) Покажем решение неравенств на окружности (рис. 52).

5) Поставим стрелки ↻.

6) Назовем меньший угол для неравенства (I): $t_1 = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$ (в IV ч.), а больший угол: $t_2 = \frac{\pi}{3}$ (в I ч.), тогда $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$. Второй промежуток $(t_3;\ t_4)$ находится из неравенства (I) прибавлением π к каждому значению t.

7) Все решения получим, если к каждому значению t прибавим πk, $k \in \mathbf{Z}$:

$$\pi k - \frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

Найдем x:

$$\pi k - \frac{\pi}{3} < \frac{1}{2}x < \frac{\pi}{3} + \pi k \ \Big|\cdot 2 \Leftrightarrow 2\pi k - \frac{2}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

8) $x \in \mathbf{R}$, все решения входят в ОДЗ.

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k;\ \frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Проверь себя!

Решите неравенство.

1. $|2\sin x| \le 1$. 2. $|\operatorname{ctg} 2x| > 1$.

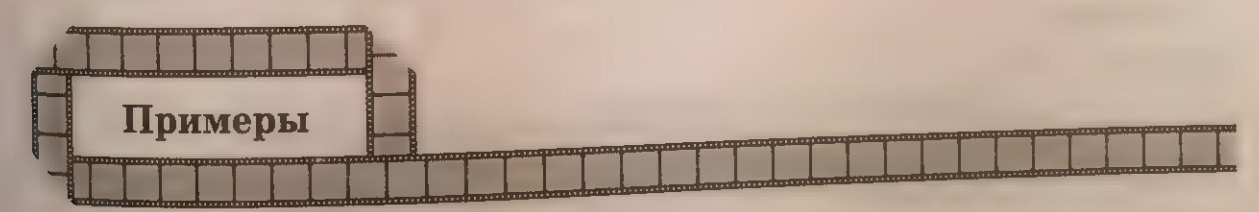
Ответ: 1. $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. $\left(\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right) \cup \left(\frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Алгоритм 25 **Решение тригонометрического неравенства, приводимого к квадратному неравенству**

1. Найдите ОДЗ.
2. Если возможно, приведите неравенство к квадратному, используя алгоритм 17.
3. Введите новую переменную, например $\sin x = t$, или $\cos x = t$, или $\operatorname{tg} x = t$, тогда $\sin^2 x = t^2$, $\cos^2 x = t^2$ и $\operatorname{tg}^2 x = t^2$.
4. Решите получившееся квадратное неравенство относительно t: $at^2 + bt + c \gtrless 0$ (методом интервалов).
5. Решите неравенство $\sin x \gtrless t_0$, $\cos x \gtrless t_0$ или $\operatorname{tg} x \gtrless t_0$ на окружности.
6. Согласуйте решение неравенства с ОДЗ.
7. Запишите ответ.

З а м е ч а н и е. Если аргумент отличен от x (имеет более сложный вид), то обозначьте его, *например*, буквой z, сначала найдите z, а затем x.



Примеры

Решите неравенство (1–2).

1. $\cos x > 2\cos^2 x$

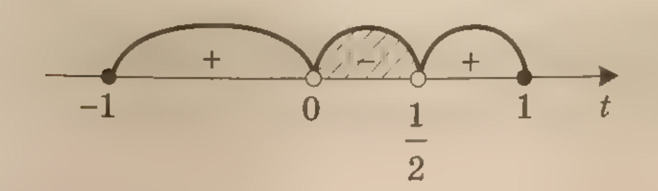
Решение.

1) ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$

2) $\cos x > 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x < 0$

3) Пусть $\cos x = t$, тогда $\cos^2 x = t^2$

4) $\begin{cases} 2t^2 - t < 0 \\ -1 \le t \le 1 \\ t = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(2t-1) < 0 \\ -1 \le t \le 1 \\ t = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \dfrac{1}{2} \\ t = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \cos x < \dfrac{1}{2}$



$|\cos x| \le 1 \Rightarrow |t| \le 1$

5) Решим неравенство

$$0 < \cos x < \frac{1}{2}$$

на окружности (рис. 53)

Примените метод интервалов

См. алгоритм 23

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi k + \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ 2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

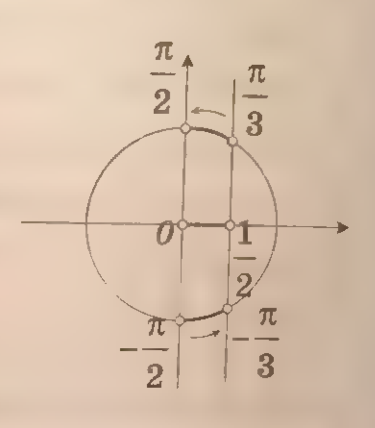


Рис. 53

6) Решения принадлежат ОДЗ.

Ответ:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right);\ n,\ k \in \mathbf{Z}.$$

2. $3\sin x > 2\cos^2 x$

Решение.

1) ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$

2) $3\sin x - 2(1 - \sin^2 x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

3) Пусть $\sin x = t$, тогда $\sin^2 x = t^2$

4) $\begin{cases} 2t^2 + 3t - 2 > 0 \\ -1 \le t \le 1 \\ t = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow$

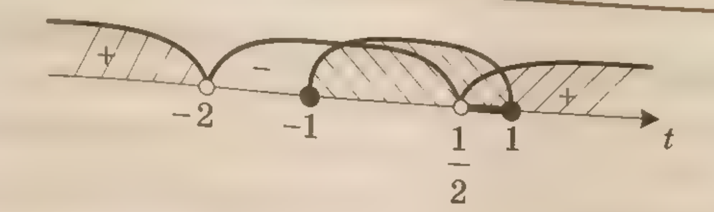
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 2) > 0 \\ -1 \le t \le 1 \\ t = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < t \le 1 \\ t = \sin x \end{cases}$$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = -2$

$2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 2) > 0$



5) Решим неравенство на окружности (рис. 54).

$\frac{1}{2} < \sin x \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\pi k + \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right),\ k \in Z.$

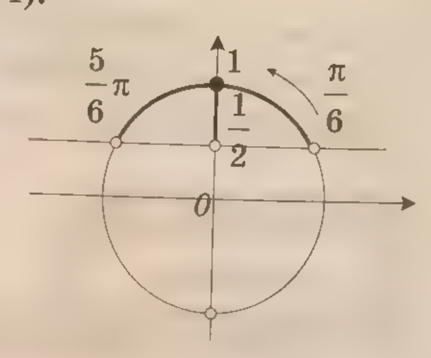


Рис. 54

Проверь себя!

Решите неравенство $2\cos^2 x - \cos x - 1 \le 0.$

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k;\ \frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right],\ k \in Z.$

Алгоритм 26 Графическое решение тригонометрических неравенств

1. Найдите ОДЗ.
2. Приведите неравенство к виду $\sin x \gtreqless t$, $\cos x \gtreqless t$ или $\operatorname{tg} x \gtreqless t$ (I)(в зависимости от того неравенства (I), какая функция дана в условии).
3. Постройте графики функций $y = \sin x$ и $y = t$, $y = \cos x$ и $y = t$ или $y = \operatorname{tg} x$ и $y = t$.
4. Найдите абсциссы точек пересечения построенных графиков (для этого опустите перпендикуляры на ось Ox из точек пересечения и запишите получившиеся значения x).
5. В зависимости от знака неравенства определите промежутки значений x на оси Ox, где выполняется неравенство:

а) $\sin x > t$, $\cos x > t$ или $\operatorname{tg} x > t$ (при этих значениях x графики функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ лежат выше прямой $y=t$);

б) $\sin x < t$, $\cos x < t$ или $\operatorname{tg} x < t$ (графики функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ при этих значениях x лежат ниже прямой $y=t$).

⑥ Согласуйте решение с ОДЗ.

⑦ Запишите ответ.

З а м е ч а н и е. Если в условии указан конкретный промежуток из ОДЗ, то решения находите только на этом промежутке.



Используя графики функций, найдите все решения неравенств, заключенные в промежутке $[-3\pi; \pi]$ **(1–2)**.

1. $2\cos x - \sqrt{3} < 0$

Решение.

1) ОДЗ: $[-3\pi; \pi]$

2) $2\cos x < \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}9$

3) Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 55).

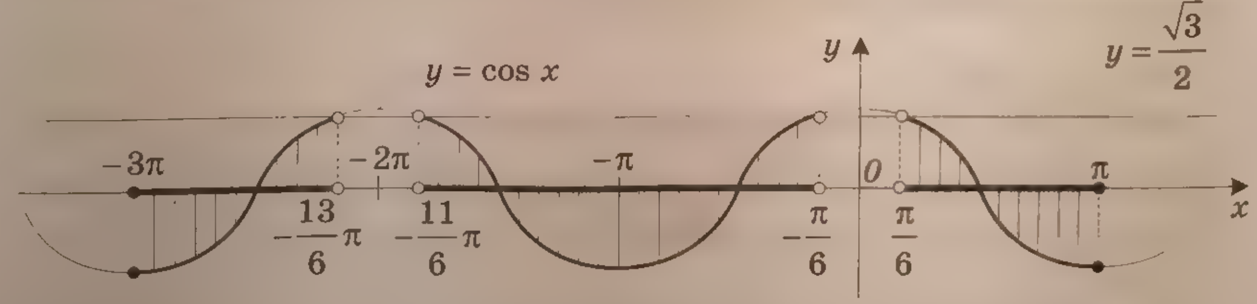


Рис. 55

4) Найдем абсциссы точек пересечения графиков на промежутке $[-3\pi; \pi]$: $-\dfrac{13}{6}\pi$, $-\dfrac{11}{6}\pi$, $-\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6}$.

5) Определим промежутки значений x, на которых график функции $y=\cos x$ ниже прямой $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6) Согласуем решения с ОДЗ:

$$-3\pi \le x < -\frac{13}{6}\pi, \quad -\frac{11}{6}\pi < x < -\frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{\pi}{6} < x \le \pi$$

Ответ: $\left[-3\pi; -2\frac{1}{6}\pi\right) \cup \left(-\frac{11}{6}\pi; -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

2. $\operatorname{tg} x \le -\sqrt{3}$

Решение.

1) Найдем на отрезке $[-3\pi; \pi]$ ОДЗ:

$x \ne -\frac{5}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi; \pm\frac{\pi}{2}$ | $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = -3; -2; -1; 0$

2) Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -\sqrt{3}$ (рис. 56).

3) Те значения x, при которых график функции $y = \operatorname{tg} x$ ниже прямой $y = -\sqrt{3}$ (включая те точки графика, которые лежат на прямой), есть решение неравенства.

4) Запишем решение неравенства $\operatorname{tg} x \le -\sqrt{3}$ с учетом ОДЗ на $[-3\pi; \pi]$:

$$-\frac{5}{2}\pi < x \le -\frac{7}{3}\pi; \quad -\frac{3}{2}\pi < x \le -\frac{4}{3}\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < x \le -\frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{2} < x \le \frac{2}{3}\pi$$

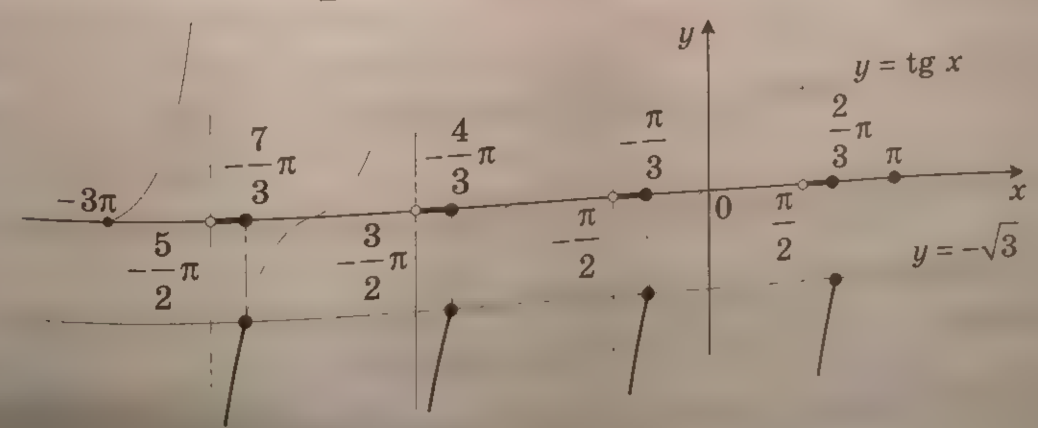


Рис. 56

Все решения можно записать так:

$$\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{2}{3}\pi+\pi k\right], \text{ если } k=-3;\ -2;\ -1;\ 0$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{2}{3}\pi+\pi k\right]$ при $k=-3;\ -2;\ -1;\ 0$.

Попробуй не реши!

Решите неравенство (1–4).

1. $\sqrt{2}\sin x+1\geq 0$. **2.** $2\sin^2 x-\sin x<0$. **3.** $\operatorname{ctg} 2x\leq -1$. **4.** $|\cos x|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right]$.

Ответ: **1.** $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5}{4}\pi+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

2. $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

3. $\left[\frac{3}{8}\pi+\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}k\right)$, $k\in Z$. **4.** $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3}{4}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{4}\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right]$.

Попробуй-ка реши!

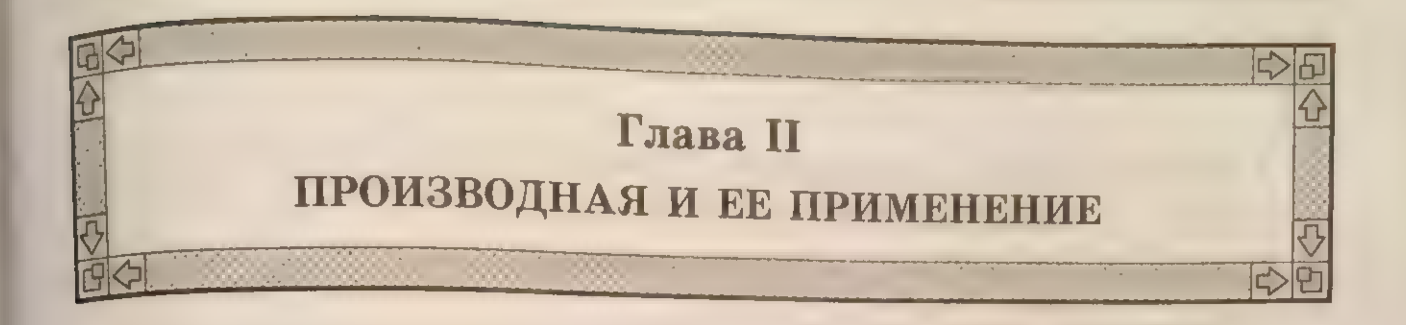
Решите неравенство (1–4).

1.ЭМ. $\cos x<1+\frac{1}{2-\sin^2 x}$. **2.ЭМ.** $\cos x>1+\frac{1}{1+x^4}$. **3.ЭМ.** $\cos x\leq 1+|x|$.

4. $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{x}{4}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** Найдите все корни уравнения $\cos x+(1+\cos x)\operatorname{ctg}^2 x-1=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x>0$.

Ответ: **1.** $(-\infty;\ +\infty)$. **2.** Нет решений. **3.** $(-\infty;\ +\infty)$.

4. $\left[\frac{\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{3}{2}\pi+4\pi n\right]$, $n\in Z$. **5.** $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.



Глава II
ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1 Производная

Некоторые сведения о пределе

В высшей математике понятие предела переменной величины является основным инструментом исследования функций. В школьном курсе изучаются элементы высшей математики — производная и интеграл, но понятия предела и бесконечно малой величины не рассматриваются подробно, а даются на интуитивном уровне, хотя символ предела «lim» используется. Поэтому в данной книге определения предела и бесконечно малой величины даны не строго, а описательно.

Величина называется *переменной*, если она изменяет свое значение в условиях данной задачи.

Бесконечно малая величина (б. м. в.) — это такая переменная x_n, значения которой становятся сколь угодно близкими к нулю при некотором условии.

Символически: $x_n \to 0$ (читается: x_n стремится к нулю).

Например: $x_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \to 0$ при $n \to \infty$

$$x_n = 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; \ldots; \ldots \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Свойства бесконечно малых величин

1. Если $\alpha \to 0$, c — постоянная, то $c \cdot \alpha \to 0$.
2. Если $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$, то $\alpha + \beta \to 0$.
3. Если $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$, то $\alpha \cdot \beta \to 0$.
4. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Число a называется *пределом* (lim) переменной величины x_n, если $|x_n - a| \to 0$ при $n \to \infty$.

Символически: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. *Например:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный числу* b, при $x \to a$, если из условия $|x - a| \to 0$ следует, что $|f(x) - b| \to 0$.

Символически: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Числовая последовательность x_n, которая имеет предел при $n \to \infty$, является *сходящейся*.

Если числовая последовательность имеет предел, то он единственный.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если функция определена в некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

При нахождении предела непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ достаточно вычислить $f(a)$, так как в случае непрерывности функции $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* $(a;\ b)$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Например: $\lim\limits_{x\to -1} (2x^2 + 1) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 3$

Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Формулы нахождения пределов сходящихся функций

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$, c — постоянная

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{c}{x^m} = 0$, c — постоянная, $m \in N$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

4. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)+\ldots+h(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) + \ldots + \lim\limits_{x\to a} h(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, c — постоянная

7. $\lim\limits_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$



1. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(7-2x)(3+5x^2)$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x}{3-x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x-1}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(7-2x)(3+5x^2) = f(2) =$
$=(7-4)(3+5\cdot 4) = 3\cdot 23 = 69$

Многочлен — непрерывная функция
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x}{3-x^2}=$

$=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(1+x)}{\lim\limits_{x\to -1}(3-x^2)}=$

$=\frac{1-1}{2}=0$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

$\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-1}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=$

$=4+0-0=4$

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=$

$=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=$

4) $=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}(x+1)=f(3)=3+1=4$

Упрощаем выражение при $x\neq 3$

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1\cdot x_2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.$

Ответ: 1) 69; 2) 0; 3) 4; 4) 4.

2. Выведите формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Решение.

Запишем формулу суммы n членов геометрической прогрессии:

$S_n=\frac{b_1-b_1q^n}{1-q}$, $q\neq 1$

Если n $\to\infty$, то $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = \dfrac{b_1}{1-q}$, что и требовалось доказать.

Геометрическая прогрессия бесконечно убывает, если $|q| < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

$|q| < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{b_1}{1-q}$ —постоянная

3. Периодическую дробь 1,2(8) обратите в обыкновенную.

Решение.

$$1{,}2(8) = 1 + \frac{2}{10} + \underbrace{\left(\frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10\,000} + \ldots\right)}_{S} =$$

$$= 1 + \frac{2}{10} + \frac{0{,}08}{1 - 0{,}1} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{0{,}08}{0{,}9} =$$

$$= 1 + \frac{2}{10} + \frac{8}{90} = 1\frac{18+8}{90} = 1\frac{26}{90} = 1\frac{13}{45}$$

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$; $b_1 = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$

$b_2 = 0{,}008$

$q = b_2 : b_1 =$

$= 0{,}008 : 0{,}08 = 0{,}1$

$\dfrac{0{,}08}{0{,}9} = \dfrac{8}{90}$

Ответ: $1{,}2(8) = 1\dfrac{13}{45}$.

Приращение аргумента и приращение функции

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_1 и x_2. Разность $x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента* (Δx), а разность $f(x_2) - f(x_1)$ называется *приращением функции* (Δy).

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$
$$f(x_2) = f(x_1) + \Delta y, \text{ причем } x_1, x_2 \in D(f)$$

З а м е ч а н и я. 1. Слово «приращение» обозначается прописной греческой буквой Δ (дельта).

2. Приращение функции может быть положительным, отрицательным и равным 0 числом.

Геометрическое изображение Δx и Δy показано на рисунке 57.

Приращение аргумента:

$\Delta x = x_2 - x_1$ — разность абсцисс точек $M_2(x_2; y_2)$ и $M_1(x_1; y_1)$.

Приращение функции:

$\Delta y = y_2 - y_1$ — разность ординат точек $M_2(x_2; y_2)$ и $M_1(x_1; y_1)$.

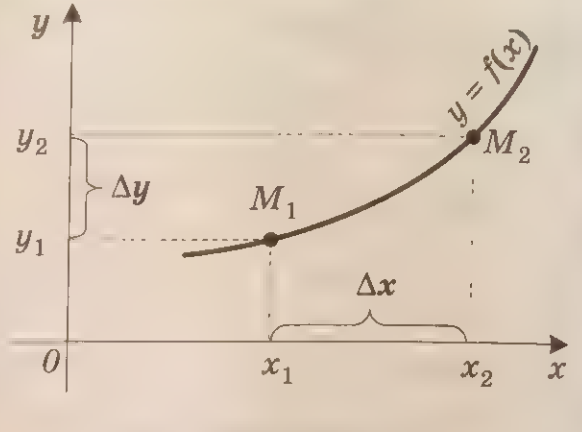


Рис. 57

Алгоритм 27 Нахождение приращения функции

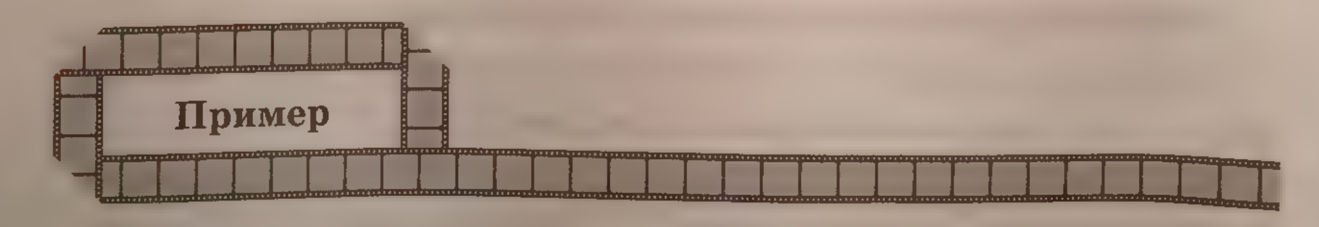
① Зафиксируйте некоторые значения аргумента x_1 и найдите $y_1 = f(x_1)$ для данной функции $y = f(x)$.

② Задайте приращение аргумента Δx в точке x_1 и найдите $x_2 = x_1 + \Delta x$.

③ Вычислите $y_2 = f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$.

④ Найдите приращение функции в точке x_1:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$



Дана функция $y = x^2$; $x_1 = 2$; $\Delta x = 0{,}1$. Найдите Δy.

Решение.

1) $x_1 = 2$; $y_1 = f(x_1) = 2^2 = 4$

2) $\Delta x = 0{,}1$; $x_2 = x_1 + \Delta x = 2 + 0{,}1 = 2{,}1$

3) $y_2 = y(x_1 + \Delta x) = y(2 + 0,1) = (2 + 0,1)^2 = 4 + 0,4 + 0,01$

4) $\Delta y = y_2 - y_1 = 4 + 0,4 + 0,01 - 4 = 0,41$

Ответ: $\Delta y = 0,41$.

В общем виде:

для функции $y = x^2$ при любом x_1 и Δx получим $y_1 = x_1^2$, $y_2 = (x_1 + \Delta x)^2$

$\Delta y = y_2 - y_1 = (x_1 + \Delta x)^2 - {x_1}^2 = (x_1 + \Delta x - x_1)(x_1 + \Delta x + x_1) =$
$= \Delta x(2x_1 + \Delta x) = 2x_1 \Delta x + (\Delta x)^2$

| $a^2 - b^2 =$
| $= (a - b)(a + b)$

Проверь себя!

Найдите Δy для функции $y = f(x)$ в точке x_0:

1. $f(x) = x^3$. **2.** $f(x) = \sqrt{x}$. **3.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Ответ: **1.** $\Delta y = 3{x_0}^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$. **2.** $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$.

3. $\Delta y = \dfrac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0}$.

Производная

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке J из $D(f)$ и точки x_0 и $x_0 + \Delta x$ *принадлежат* этому промежутку. Предел отношения приращения функции Δy (или Δf) к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Символическая запись производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ где } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ или}$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Выражение $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называется разностным отношением (Δx в некоторых учебниках обозначается буквой h). Условные обозначения производной:

$$f'(x);\ \ F'(x);\ \ y'(x);\ \ S'_t(x)$$

Определение 2. Функция $f(x)$, имеющая производную в точке x_0 некоторого промежутка, называется *дифференцируемой в этой точке.*

Определение 3. Функция $y=f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка J, называется *дифференцируемой на промежутке* J.

Дифференциал функции — это главная часть приращения функции, причем $dy \approx \Delta y$, $dy = y'(x)\cdot dx$.

Например: рассмотрим понятие дифференциала на примере функции $y=x^2$. Ее приращение Δy состоит из суммы двух слагаемых: $\Delta y = 2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$. При очень малом значении Δx значение $(\Delta x)^2$ станет еще меньшим, чем Δx, тогда $\Delta y \approx \underbrace{2x\cdot\Delta x}_{\text{главная часть приращения}}$ ($(\Delta x)^2$ отбросим в силу ее малости). Именно $2x\cdot\Delta x$ в данном примере приняли за дифференциал этой функции и обозначили символом dy, а $\Delta x = dx$, т. е. $dy = 2x\cdot dx$.

Нетрудно убедиться, что $2x=\left(x^2\right)' \Rightarrow dy = y'(x)\cdot dx \Rightarrow y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

Получили иную запись производной: $y'=\dfrac{dy}{dx}$ — **определение производной** через отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

З а м е ч а н и е. Задача вычисления производной $f'(x)$ заданной функции $f(x)$ называется *дифференцированием* и составляет предмет дифференциального исчисления, обратная ей задача — нахождения первообразной функции $F(x)$ по дифференциалу $dy = y'dx$ — называется *интегрированием* и составляет предмет интегрального исчисления.

Дифференциальное и интегральное исчисления составляют предмет — математический анализ. В школе изучают лишь элементы (начала) математического анализа.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0, то в этой точке функция $f(x)$ непрерывна.

Замечание. Обратное утверждение не всегда верно, но мы будем иметь дело главным образом лишь с такими непрерывными функциями на их области определения, которые во всех точках имеют производную.

Дифференцирование

Алгоритм 28 **Нахождение производной функции по определению**

① Запишите символически определение производной:

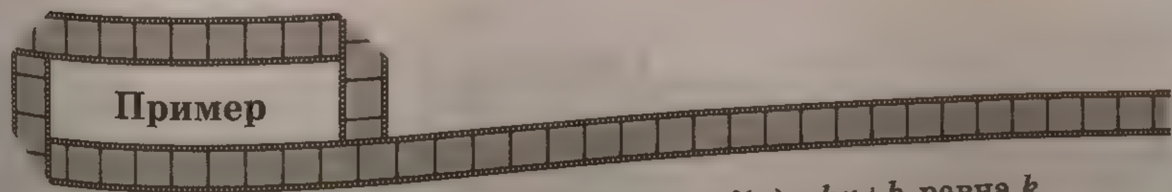
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

② Задайте Δx и найдите $f(x_0 + \Delta x)$ (в функцию $f(x)$ вместо x подставьте $(x_0 + \Delta x)$ и упростите).

③ Найдите $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и упростите.

④ Найдите $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и упростите.

⑤ Найдите $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.



Докажите, что производная функции $f(x) = kx + b$ равна k.

Дано: $f(x) = kx + b$.

Доказать: $f'(x) = k$.

Доказательство.

1) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

2) Зададим Δx и найдем $f(x_0 + \Delta x)$:

$$f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b = kx_0 + k\Delta x + b$$

3) Найдем Δf:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = kx_0 + k\Delta x + b - kx_0 - b = k\Delta x$$

4) Найдем $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$

5) Найдем f': $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

Получим $(kx + b)' = k.$

Если $(kx + b)' = k$, то $(kx)' = k$ и $(b)' = 0.$

Применим полученные формулы к нахождению производных функций:

1) $3x - 5$; 2) $-\dfrac{1}{2} + x$; 3) $7x$; 4) $\dfrac{x}{3}$; 5) x.

Решение.

1) $(3x - 5)' = 3$	$(kx + b)' = k$; $k = 3$
2) $\left(-\dfrac{1}{2} + x\right)' = 1$	$(kx + b)' = k$; $k = 1$
3) $(7x)' = 7$	$(kx)' = k$; $k = 7$
4) $\left(\dfrac{x}{3}\right)' = \dfrac{1}{3}$	$\left(\dfrac{x}{k}\right)' = \dfrac{1}{k}$; $k = \dfrac{1}{3}$
5) $(x)' = 1$	$(1 \cdot x)' = 1$; $k = 1$

Проверь себя!

Найдите производную функции по определению.

1. $y = x^2$. 2. $y = \frac{1}{x}$. 3. $y = \sqrt{x}$.

Ответ: 1. $2x$. 2. $-\frac{1}{x^2}$. 3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Производные всех элементарных функций можно найти по определению.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$

2. $(x)' = 1$

3. $(kx)' = k$ $\quad (kx+b)' = k$

4. $\left(\frac{x}{c}\right)' = \frac{1}{c}$ $\quad \left(\frac{kx+b}{c}\right)' = \frac{k}{c}$

5. $(x^2)' = 2x$ $\quad (kx^2)' = 2kx$

6. $(x^p)' = px^{p-1}$ $\quad ((kx+b)^p)' = kp(kx+b)^{p-1}$

7. $(kf(x))' = kf'(x)$ $\quad (f(kx+b))' = kf'(kx+b)$

8. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad (\sqrt{kx+b})' = \frac{k}{2\sqrt{kx+b}}$

9. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\quad \left(\frac{c}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}$

10. $(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\sin(kx+b))' = k\cos(kx+b)$

11. $(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\cos(kx+b))' = -k\sin(kx+b)$

12. $(\text{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad (\text{tg}(kx+b))' = \dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$

13. $(\text{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad (\text{ctg}\,(kx+b))' = -\dfrac{k}{\sin^2(kx+b)}$

14. $(e^x)' = e^x$ $\qquad (e^{kx+b})' = ke^{kx+b}$

15. $(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad (a^{kx+b})' = ka^{kx+b} \ln a$

16. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad (\ln(kx+b))' = \dfrac{k}{kx+b}$

17. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\qquad (\log_a(kx+b))' = \dfrac{k}{(kx+b)\ln a}$

Производная сложной функции (аргумент которой отличен от $(kx+b)$) находится по формуле

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пусть $f(x) = u$, $g(x) = v$, u и v — непрерывные и дифференцируемые функции, тогда для них верны формулы:

1. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

2. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

3. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

4. $(\text{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

5. $(\text{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

6. $(u^p)' = pu^{p-1} \cdot u'$ $(p \in \mathbf{R})$

7. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

9. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

10. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Правила дифференцирования

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$

Полезный совет

Все производные функции $f(kx + b)$ можно находить по правилу производной сложной функции: $(f(kx + b))' = f'(kx + b) \cdot (kx + b)' = kf'(kx + b)$.

Алгоритм 29 Нахождение значения производной функции $f(x)$ в точке x_0

① Найдите область определения функции $D(f)$.

② Упростите выражение, стоящее под знаком производной (если возможно).

③ Определите, какое *последнее* действие в выражении, и выберите нужную формулу в таблице производных по нему. Если функция сложная, то примените правило дифференцирования сложной функции.

④ Запишите эту формулу рядом с примером за чертой и примените ее.

⑤ Снова определите последнее действие и повторяйте этот процесс, пока не найдете производную от x.

Замечание. В ответе получится функция от того же аргумента или число.

⑥ Подставьте x_0 вместо x в выражение $f'(x)$ и вычислите $f'(x_0)$.



1. Найдите производную функции: 1) $\frac{1}{9x^5}$; 2) $(1-2x)^6$; 3) $\sqrt[3]{2x+7}$.

Решение.

1) $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$

$$\left(\frac{1}{9x^5}\right)'=\left(\frac{1}{9}x^{-5}\right)'=\frac{1}{9}\cdot(-5)\cdot x^{-6}=-\frac{5}{9x^6}$$

$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

$\left(kx^p\right)'=kpx^{p-1}$

$k=\frac{1}{9};\ p=-5$

2) $D(y)=\boldsymbol{R}$

$$\left((1-2x)^6\right)'=-2\cdot 6(1-2x)^5=-12(1-2x)^5$$

$\left((kx+b)^n\right)'=kn(kx+b)^{n-1}$

$k=-2;\ n=6$

3) $D(y)=\boldsymbol{R}$

$$\left(\sqrt[3]{2x+7}\right)'=\left((2x+7)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 2(2x+7)^{-\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+7)^2}}$$

$\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$

$\left((kx+b)^p\right)'=kp(kx+b)^{p-1}$

$k=2;\ p=\frac{1}{3}$

Ответ: 1) $-\frac{5}{9x^6}$; 2) $-12\,(1-2x)^5$; 3) $\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+7)^2}}$.

2. **ЕГЭ.** Найдите производную функции $y=x\sin x$.

Решение.

$D(y)\in\boldsymbol{R}$

$y'=(x\sin x)'=$

$=(x)'\sin x+x(\sin x)'=$

$=\sin x+x\cos x$

$(u\cdot v)'=u'v+v'u$

$(x)'=1$

$(\sin x)'=\cos x$

Ответ: $y'=\sin x+x\cos x$.

3. ЕГЭ. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^2 - 6\ln x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

1) $D(\ln x) = (0; +\infty)$

2) $f'(x) = (\underbrace{3x^2}_{u} - \underbrace{6\ln x}_{v})' =$

$= (3x^2)' - (6\ln x)' = 6x - \dfrac{6}{x}$

3) $f'(1) = 6 \cdot 1 - \dfrac{6}{1} = 6 - 6 = 0$

$(u - v)' = u' - v'$; $(kx^n)' = knx^{n-1}$

$(c \cdot \ln x)' = \dfrac{c}{x}$

Ответ: $f'(1) = 0$.

4. ЕГЭ. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (3x^2 + 1)(3x^2 - 1)$.

Решение.

1) $D(f) = \mathbf{R}$

2) $f(x) = (3x^2 + 1)(3x^2 - 1) = 9x^4 - 1$

3) $f'(x) = (9x^4 - 1)' = (9x^4)' - (1)' = 36x^3 - 0 = 36x^3$

4) $36x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(u - v)' = u' - v'$

$(kx^n)' = knx^{n-1}$

$(c)' = 0$

Ответ: 0.

5. ЕГЭ. Найдите значение производной функции $y = \dfrac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение.

1) $D(y) \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2) $y' = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)' = \dfrac{x' \cdot (x-1) - (x-1)' \cdot x}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot x}{(x-1)^2} == \dfrac{x - 1 - x}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

Дробь $\dfrac{x}{x-1}$ имеет смысл, если $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

3) $y'(0)=-\frac{1}{(0-1)^2}=-\frac{1}{1}=-1$

Ответ: $y'(0)=-1$.

6. Найдите значение производной $\left(\frac{x^4+x^3+81}{x^2}\right)'$ в точке $x_0=3$.

Решение.

1) $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

2) $\frac{x^4+x^3+81}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{x^3}{x^2}+\frac{81}{x^2}=$

$=x^2+x+81x^{-2}$

3) $y'=\left(x^2+x+81x^{-2}\right)'=2x+1-162x^{-3}=$

$=2x+1-\frac{162}{x^3}$

4) $f'(3)=2\cdot3+1-\frac{162}{27}=6+1-6=1$

Ответ: $f'(3)=1$.

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

$(u+v)'=u'+v'$

$\left(x^2\right)'=2x$

$\left(kx^n\right)'=knx^{n-1}$

7. Найдите производную: $\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}\right)'$.

Решение.

1) $D(f)=(0;+\infty)$

2) $\frac{\sqrt{x}}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{1}{2}-2-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{11}{6}}$

3) $\left(x^{-\frac{11}{6}}\right)'=-\frac{11}{6}\cdot x^{-\frac{17}{6}}=-\frac{11}{6\sqrt[6]{x^{17}}}$

$\sqrt{x}$ существует при $x\ge0$

$\frac{a}{b}$ имеет смысл при $b\ne0$

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$\left(x^p\right)'=px^{p-1}$

Ответ: $-\frac{11}{6\sqrt[6]{x^{17}}}$.

8. Найдите производную: $\left(\dfrac{5^{2x}}{\sin 3x+7}\right)'$.

ОДЗ: $x\in \mathbf{R}$, $\sin 3x \neq -7$

$$\left(\frac{\overbrace{5^{2x}}^{u}}{\underbrace{\sin 3x+7}_{v}}\right)' = \frac{\left(5^{2x}\right)'\cdot(\sin 3x+7)-(\sin 3x+7)'\cdot 5^{2x}}{(\sin 3x+7)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 5^{2x}\cdot \ln 5\cdot(\sin 3x+7)-3\cos 3x\cdot 5^{2x}}{(\sin 3x+7)^2}=$$

$$=\frac{5^{2x}(2\ln 5\sin 3x+14\ln 5-3\cos 3x)}{(\sin 3x+7)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$\left(a^{kx}\right)'=ka^{kx}\ln a$$

$$(c)'=0$$

$$(\sin(kx))'=k\cos(kx)$$

$$(kx+b)'=k$$

Ответ: $\dfrac{5^{2x}(2\ln 5\sin 3x+14\ln 5-3\cos 3x)}{(\sin 3x+7)^2}$.

Проверь себя!

Найдите производную функции.

1. $y=5x-x^2-\dfrac{1}{3}x^3$. **2.** $y=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}$.

3. $y=x^2\cdot\sin x$. **4.** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1-2x}$.

Ответ: **1.** $y'=5-2x-x^2$. **2.** $y'=1+\dfrac{2}{x^3}$. **3.** $y'=2x\sin x+x^2\cos x$.

4. $y'=\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

9. ЭМ. Найдите значение производной функции $y=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

Решение.

1) $D(\sin x) = R$, $f(x)$ — непрерывная, имеет производную

2) $y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$

3) $y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$(\sin(kx+b))' =$
$= k\cos(kx+b)$

Ответ: $y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}$.

10. ЭМ. Найдите производную функции $f(x) = e^x \cos x$.

Решение.

1) $D(f) = R$

2) $f'(x) = \left(e^x \cos x\right)' =$

$= (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' =$

$= e^x \cos x - e^x \sin x =$

$= e^x(\cos x - \sin x) = \sqrt{2} e^x \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$u = e^x$; $v = \cos x$ — непрерывные и дифференцируемые функции

$(u \cdot v)' = u'v + v'u$

$\left(e^x\right)' = e^x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

Ответ: $y' = \sqrt{2} e^x \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

Попробуй не реши!

Найдите значение производной функции.

1. $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$

2. ЭМ. $f(x) = x^3 \ln x$ в точке $x_0 = 4$

3. ЭМ. $f(x)=6\sin x+\operatorname{tg} x$ в точке $x_0=-\dfrac{\pi}{6}$

4. ЭМ. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ в точке $x_0=1$

Ответ: 1. $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$. 2. $f'(4)=16(3\ln 4+1)$. 3. $f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{9\sqrt{3}+4}{3}$.
4. $y'(1)=1$.

З а м е ч а н и е. При нахождении производных надо находить $D(f)$.

11. *Дано:* $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{1}{(x+2)^3}}-5e^{\frac{x-4}{5}}$.

Найти: $f'(x)$.

Решение.

1) $D(f)=(-2;+\infty)$

2) Упростим $f(x)$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}}-5e^{\frac{x-4}{5}}=(x+2)^{-\frac{3}{4}}-5e^{\frac{x-4}{5}}$$

3) $$f'(x)=\left((x+2)^{-\frac{3}{4}}-5e^{\frac{x-4}{5}}\right)'=$$

$$=\left((x+2)^{-\frac{3}{4}}\right)'-\left(5e^{\frac{x-4}{5}}\right)'=$$

$$=-\frac{3}{4}(x+2)^{-\frac{3}{4}-1}-5\cdot\frac{1}{5}e^{\frac{x-4}{5}}=-\frac{3}{4\sqrt[4]{(x+2)^7}}-e^{\frac{x-4}{5}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(kx+b)^k}}=(kx+b)^{-\frac{k}{n}}$$

$$\left((kx+b)^n\right)'=kn(kx+b)^{n-1}$$

$$\left(\frac{kx+b}{c}\right)'=\frac{k}{c}$$

$$\left(e^{kx+b}\right)'=ke^{kx+b}$$

$$-\frac{3}{4}-1=-\frac{7}{4}$$

Ответ: $f'(x)=-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{(x+2)^7}}-e^{\frac{x-4}{5}}$.

12. *Дано:* $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

Найти: значение x, при котором $f'(x)>0$.

Решение.

1) $D(f)=[0;+\infty)$

$\sqrt{x}$ имеет смысл при $x\ge 0$

2) $f'(x)=\left((x-3)\sqrt{x}\right)'=\left(x\sqrt{x}-3\sqrt{x}\right)'=$

$=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-\left(3\sqrt{x}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}=$

$=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$(u-v)'=u'-v'$

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$; $\left(k\sqrt{x}\right)'=\frac{k}{2\sqrt{x}}$

$a^m a^n=a^{m+n}$

$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$

3) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{\sqrt{x}}>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}>0\\ x-1>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

$\frac{a}{b}>0$

если $b>0$, то $a>0$

a и b одного знака

$\sqrt{x}\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2=x$

Ответ: $f'(x)>0$ при $x>1$.

13. *Дано:* $f(x)=\sin^3 2x$.

Найти: $f'(x)$.

Решение.

1) $D(f)=R$

2) $f'(x)=\left(\sin^3 2x\right)'=$

$=3\sin^2 2x\cdot(\sin 2x)'=$

$=3\sin^2 2x\cdot 2\cos 2x=$

$=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x=3\sin 2x\cdot\sin 4x$

Последнее действие — возведение в степень

$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$; $n=3$; $u=\sin 2x$

$(\sin(kx))'=k\cos(kx)$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\alpha=2x$

Ответ: $f'(x)=3\sin 2x\cdot\sin 4x$.

14. *Дано:* $y = \ln^2(x^3 - 1)$.

Найти: $y'(2)$.

Решение.

1) $D(y) = (1; +\infty)$

2) $y' = \left(\ln^2(x^3-1)\right)' = 2\ln(x^3-1)\left(\ln(x^3-1)\right)' =$

$= 2\ln(x^3-1)\dfrac{(x^3-1)'}{x^3-1} = 2\ln(x^3-1)\dfrac{3x^2}{x^3-1} =$

$= \dfrac{6x^2\ln(x^3-1)}{x^3-1}$

3) $y'(2) = \dfrac{6\cdot 4\ln(8-1)}{8-1} = \dfrac{24\ln 7}{7}$

$\ln f(x)$ имеет смысл, если $f(x) > 0$

$x^3 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Последнее действие — возведение в степень

$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}\cdot u'$

$u = \ln(x^3 - 1)$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$\left(x^n - c\right)' = nx^{n-1}$

Ответ: $y'(2) = \dfrac{24\ln 7}{7}$.

Попробуй не реши!

1. Найдите производную: а) $\left(-\dfrac{1}{5}x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 1\right)'$; б) $\left((4-3x)^7\right)'$;

в) $\left(\sin(x-3) - \ln(1-2x)\right)'$.

2. Найдите значения x, при которых: а) $f'(x) = 0$; б) $f'(x) > 0$, если $f(x) = 2x^2 - 4x$.

3. Найдите $f'(1)$ для функции $f(x) = e^x \ln x$.

Ответ: **1.** а) $-x^4 + 6x^2 - 6x$; б) $-21(4-3x)^6$; в) $y = \cos(x-3) + \dfrac{2}{1-2x}$.

2. а) $f'(x) = 0$ при $x = 1$; б) $f'(x) > 0$ при $x > 1$. **3.** $f'(1) = e$.

Попробуй-ка реши!

1. Найдите, при каких значениях x для функции $f(x)=(x+3)^3(x-4)^2$ выполняется условие $f'(x)=0$; $f'(x)>0$.

2. Найдите $f'(x)$, если $f(x)=\cos^4 2x$.

3. Найдите значения производной функции $f(x)=e^{2x}\ln(2x-1)$ в точках, в которых значение этой функции равно нулю.

4. Вычислите $f'(x)+f(x)+2$, если $f(x)=x\sin 2x$, в точке $x=\pi$.

Ответ: **1.** $f'(x)=0$ при $x=-3$; $\frac{6}{5}$; 4; $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;-3)\cup\left(-3;\frac{6}{5}\right)\cup(4;+\infty)$. **2.** $f'(x)=-8\cos^3 2x\cdot\sin 2x$. **3.** $f(x)=0$ при $x=1$, $f'(1)=2e^2$. **4.** $2\pi+2$.

Геометрический смысл производной

Определение. *Касательной к графику функции* $y=f(x)$ в данной точке $M_0(x_0;y_0)$ называется предельное положение секущей M_0M_1 при движении точки M_1 по графику к точке M_0 ($M_1\to M_0$) (рис. 58), т. е. при $\Delta x\to 0$.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \varphi\to\alpha \text{ при } M_1\to M_0,\ \lim_{\varphi\to\alpha}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$$

M_0M_1 — секущая

M_0K — касательная

φ — угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox

α — угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox

$DK=dy$ — дифференциал функции $y=f(x)$

$DM_1=\Delta y$ — приращение функции $y=f(x)$

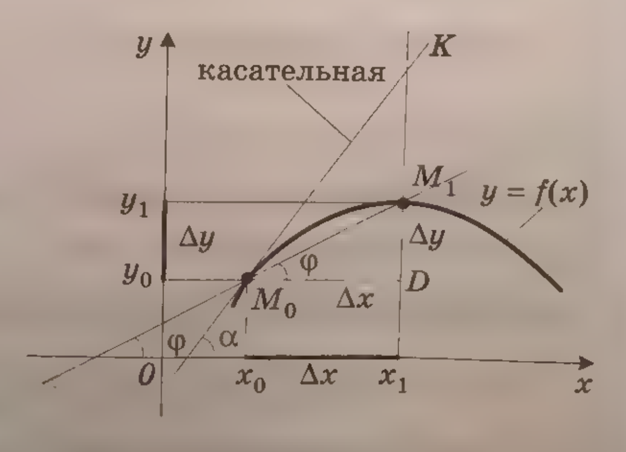


Рис. 58

Значение производной функции в точке $M_0(x_0;y_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке. В этом состоит *геометрический смысл производной*.

$k_{кас}=f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$ (α — угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox. Если $k>0$, то α — острый угол, значит, $\operatorname{tg}\alpha>0$; если $k<0$, то α — тупой угол, значит, $\operatorname{tg}\alpha<0$).

Уравнение касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ — это уравнение прямой $y=kx+b$, где $f'(x_0)=k_{кас}$, $(x_0;y_0)$ — точка касания.

Алгоритм 30 **Нахождение уравнения касательной к графику функции $f(x)$ в данной точке $(x_0; f(x_0))$**

① Запишите уравнение касательной:

$$f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

② Найдите $f'(x)$.

③ Вычислите $f'(x_0)=k_{кас}$ (подставьте x_0 в формулу $f'(x)$).

④ Вычислите $f(x_0)$ (подставьте x_0 в формулу $y=f(x)$).

⑤ Подставьте x_0, $f'(x_0)$ и $f(x_0)$ в уравнение касательной (п. 1) и упростите.

⑥ Запишите ответ ($y=kx+b$).



1. *Дано:* $f(x)=e^x$; $x_0=\ln 3$.

Найти: $k_{кас}$ в точке x_0.

Решение.

$k_{кас} = f'(x_0)$ | $k_{кас} = f'(x_0)$ — геометрический смысл производной (см. стр. 449)

$f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$

$k_{кас} = f'(x_0) = f'(\ln 3) = e^{\ln 3} = 3$ | $a^{\log_a b} = b$

Ответ: $k_{кас} = 3$.

2. ЭМ. Дана функция $f(x) = (x-1)^2(x-2)$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение.

1) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2) $f'(x) = \left((x-1)^2(x-2)\right)' =$

$= (x^3 - 4x^2 + 5x - 2)' =$

$= 3x^2 - 8x + 5$

| $(x-1)^2(x-2) = (x^2 - 2x + 1)(x-2) =$

$= x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$; $(c)' = 0$

3) $f'(2) = 3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 5 = 1$

4) $f(2) = (2-1)^2(2-2) = 0$

5) Подставим $x_0 = 2$; $f'(2) = 1$ и $f(2) = 0$ в п. 1

$y = 1(x-2) + 0$; $y = x - 2$

Ответ: $y = x - 2$.

3. ЭМ. Дана функция $f(x) = 3 + 5x + 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которых угловой коэффициент касательной к нему равен –7.

Дано: $f(x) = 3 + 5x + 3x^2$; $k_{кас} = -7$.

Найти: $A(x_0; f(x_0))$ — точку касания.

Решение.

1) $k_{кас} = y'(x_0)$ | $k_{кас} = y'(x_0)$ — геометрический смысл производной

$f'(x) = \left(3 + 5x + 3x^2\right)' = 6x + 5$

2) $f'(x_0)=6x_0+5=-7 \Leftrightarrow 6x_0=-12;\ x_0=-2$ | $k_{кас}=-7$

3) $y_0=f(x_0)=f(-2)=3+5\cdot(-2)+3\cdot(-2)^2=3-10+12=5$

Ответ: $A(-2;5)$ — точка касания.

4. ЭМ. Дана функция $f(x)=\frac{1}{3}x^3+5x^2-1$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

Дано: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+5x^2-1$; l_n — касательные; $l_n \| Ox$.

Найти: координаты точек касания.

Решение.

1) Если $l_n \| Ox$, то $k_l=0$

2) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+5x^2-1\right)'=$

$=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+\left(5x^2\right)'-(1)'=x^2+10x$

| $k_{кас}=f'(x_0)$ — геометрический смысл производной

3) $k_{кас}=0 \Rightarrow x^2+10x=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=-10$, где x_1 и x_2 — абсциссы искомых точек касания

4) $f(x_1)=f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0+5\cdot 0-1=-1 \Rightarrow A(0;-1)$

$f(x_2)=f(-10)=-\frac{1000}{3}+5\cdot 100-1=-333\frac{1}{3}+500-1=$

$=165\frac{2}{3} \Rightarrow B\left(-10;165\frac{2}{3}\right)$

Ответ: $A(0;-1)$, $B\left(-10;165\frac{2}{3}\right)$ — точки касания.

5. ЭМ. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=2\sqrt{x}+x$, параллельной прямой $y=2x$.

Решение.

1) Уравнение касательной:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2) Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x} + x\right)' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

3) Найдем x_0 из условия $f'(x_0) = 2$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$D(y) = [0; +\infty)$

$$\left(k\sqrt{x}\right)' = \frac{k}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x_0) = k_{кас}$

$k = 2;\ (2x)' = 2$

$k_{l_1} = k_{l_2}$, если $l_1 \parallel l_2$

4) Вычислим $f(x_0)$: $f(x_0) = f(1) = 2\sqrt{1} + 1 = 3$

5) Подставим значения $f'(x_0) = 2,\ x_0 = 1,\ f(x_0) = 3$ в уравнение касательной:

$$y = 2(x-1) + 3 \Rightarrow y = 2x + 1$$

Ответ: $y = 2x + 1$.

6. ЕГЭ. На рисунке 59 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

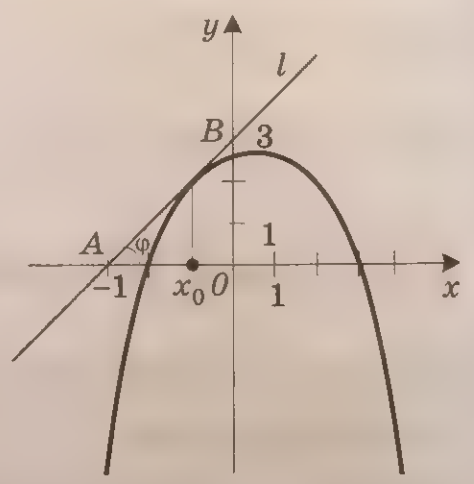


Рис. 59

Решение.

Геометрический смысл производной — это $k_{кас} = \operatorname{tg}\varphi$, φ — острый угол, поэтому $\operatorname{tg}\varphi > 0$.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Delta AOB:\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{|OB|}{|OA|}$$

Ответ: $f'(x_0) = 1$.

7. ЕГЭ. К графику функции $y = x^2$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Где расположена точка пересечения этой касательной с осью Oy?

1) выше точки (0; 0)

2) ниже точки (0; 0)

3) в точке (0; –20)

4) в точке (0; 0)

Решение.

Найдем уравнение касательной:

1) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2) $f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$

3) $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

4) $f(1) = 1^2 = 1$

5) $y = 2(x-1)+1;\quad y = 2x - 1$

$k_{\text{кас}} = f'(1)$

$y = 2x - 1$ пересечет ось Oy в точке $x = 0$

$y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$(0; -1)$

Значит, касательная пересекает ось Oy ниже точки (0; 0), но не проходит через точку (0; –20).

Ответ: номер верного ответа: 2.

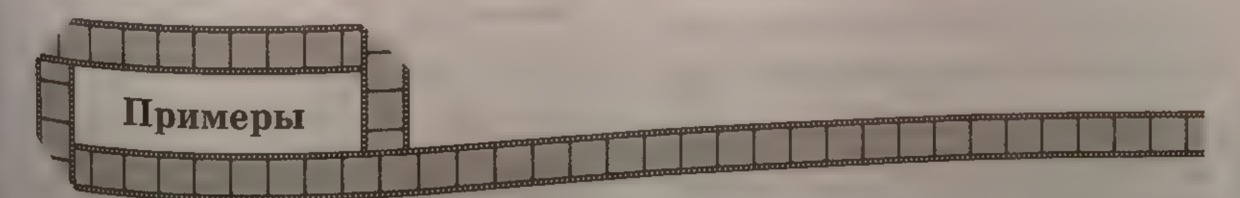
Механический (физический) смысл производной

Мгновенная скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть производная этой функции в данной точке: $v_t = s'(t)$; $f'(x) = v_{x_0}$.

Например:

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, где v_0 и a — постоянные, $a > 0$

$v_t = s_t' = \left(v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right)' = v_0 + at = v$ — скорость



1. Найдите мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t+1}$, в момент времени $t = 3$.

Решение.

1) ОДЗ: $t \geq 0$ (t — время)

2) $v_t = s'_t = (\sqrt{t+1})' = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$

3) $v(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3+1}} = \dfrac{1}{4}$

Мгновенная скорость изменения функции $v_t = f'(t)$ — механический смысл производной

$(\sqrt{kx+b})' = \dfrac{1 \cdot k}{2\sqrt{kx+b}}$, $k = 1$

Ответ: $v(3) = \dfrac{1}{4}$.

2. ЭМ. Тело движется по прямой так, что расстояние s от него до некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $s(t) = 1 + 4t - t^2$ (м), где t — время движения в секундах. Через какое время после начала движения тело остановится?

Решение.

$v_t = s'(t)$ — это механический смысл производной.

Функция $s(t)$ определена при всех значениях $t > 0$, значит, она дифференцируема при $t > 0$:

$$v_t = s'(t) = (1 + 4t - t^2)' = 4 - 2t$$

Тело остановится, если $v_t = 0$, тогда $4 - 2t = 0$; $t = 2$ (с).

Ответ: через 2 с.

Краткие сведения. 1. **Определение производной:**

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Геометрический смысл производной: $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k_{кас}$ (α — угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox) (рис. 60).

3. Механический смысл производной: $f'(x_0) = v_t$ — мгновенная скорость изменения функции в точке x_0.

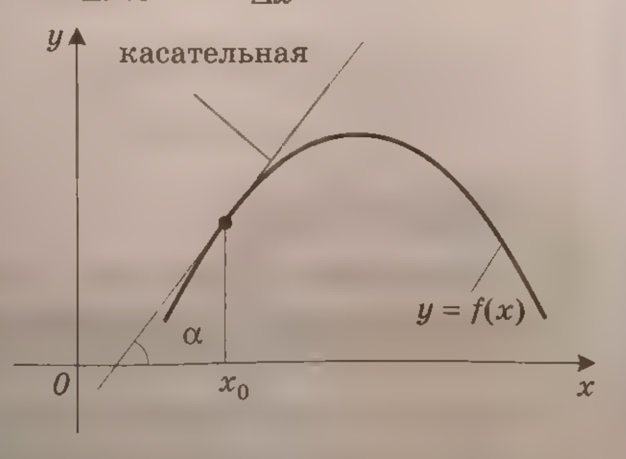


Рис. 60

§ 2 Вторая производная функции

Производная $y' = f'(x)$ данной дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *производной первого порядка* (первой производной). Она представляет собой некоторую новую функцию. Возможно, она тоже имеет производную.

Определение. Производная от первой производной функции называется *второй производной функции* и обозначается y'' или $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Механический смысл второй производной — это ускорение a_t изменения функции в момент времени t:

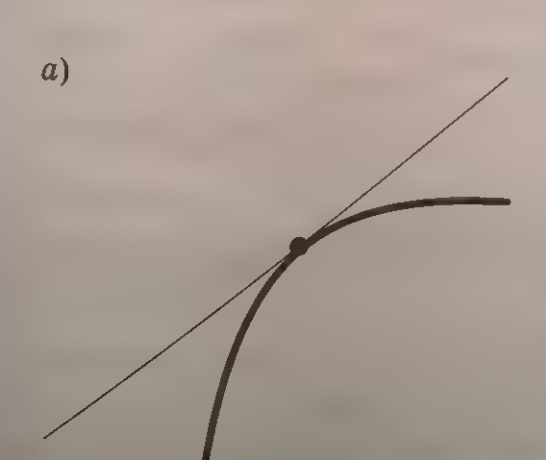
$$a_t = \left(s'_t\right)' = v'_t$$

Геометрический смысл второй производной: $f''(x)$ влияет на выпуклость или вогнутость графика функции $f(x)$ на промежутке J.

Если $f''(x) < 0$ на промежутке J, то график этой функции имеет выпуклость вверх (рис. 61, *а*); если $f''(x) > 0$ на промежутке J, то график имеет выпуклость вниз (или говорят: вогнутость графика; рис. 61, *б*).

Обратите внимание: на рисунке 61, *а* график расположен под касательной, а на рисунке 61, *б* — над касательной.

а)



б)

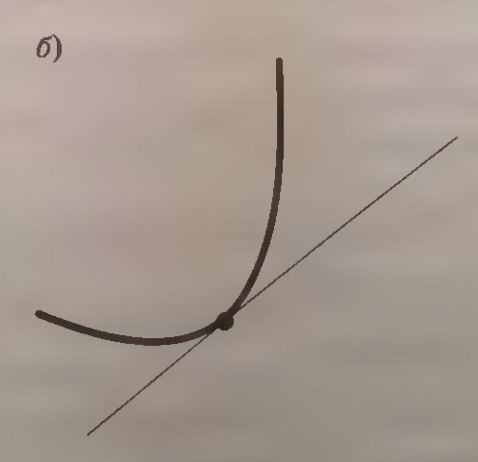


Рис. 61

Алгоритм 31. Нахождение второй производной данной функции $f(x)$

① Найдите область определения функции: $D(f)$.

② Найдите $f'(x)$ — производную функции.

③ Найдите производную функции $f'(x)$, т. е. $f''(x)$.



1. ЭМ. Дана функция $f(x)=2\cos x-\cos 2x$. Упростите выражение $\dfrac{f''(x)+f(x)}{\cos 2x}$.

<u>Решение.</u>

1) ОДЗ:

$\cos 2x\neq 0;\ 2x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$

2) $f'(x)=(2\cos x-\cos 2x)'=-2\sin x+2\sin 2x$

3) $f''(x)=(-2\sin x+2\sin 2x)'=-2\cos x+4\cos 2x$

4) $\dfrac{-2\cos x+4\cos 2x+2\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}=\dfrac{3\cos 2x}{\cos 2x}=3$

$\dfrac{a}{b}$ имеет смысл при $b\neq 0$

$(\cos kx)'=-k\sin x$

$(u-v)'=u'-v'$

$(c\cos x)'=-c\sin x$

$(\sin kx)'=k\cos x$

Ответ: $\dfrac{f''(x)+f(x)}{\cos 2x}=3$.

2. Движение задано уравнением $y=at^2+bt+c$. Найдите скорость и ускорение при этом движении.

<u>Решение.</u>

$v_t=y'=(at^2+bt+c)'=2at+b;\quad a_t=v_t'=(2at+b)'=2a$ — постоянная величина.

При $t=0$ координата y_0 и значение v_0 называются начальной координатой и начальной скоростью:

$$y_0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c; \;\; v_0 = 2a \cdot 0 + b = b$$

Итак, уравнение $y = at^2 + bt + c$ есть уравнение равноускоренного движения с ускорением $2a$, начальной координатой c и начальной скоростью $v_0 = b$.

Замечание. Если $f'(x) = c$, то $f''(x) = 0$; механический смысл этого: $v_t = f'(x) = c$ — const, $a_t = 0$. (Если скорость движения точки постоянна, то ускорение движения равно нулю.)

§ 3 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний $y'' = -\omega^2 \cdot y$

Процессы, которые периодически повторяются (*например*, колебания каждой точки натянутой струны, пружины, процессы с переменным током, магнитным полем и т. д.), сводятся к решению дифференциального уравнения $y'' = -\omega^2 \cdot y$, где ω — заданное положительное число.

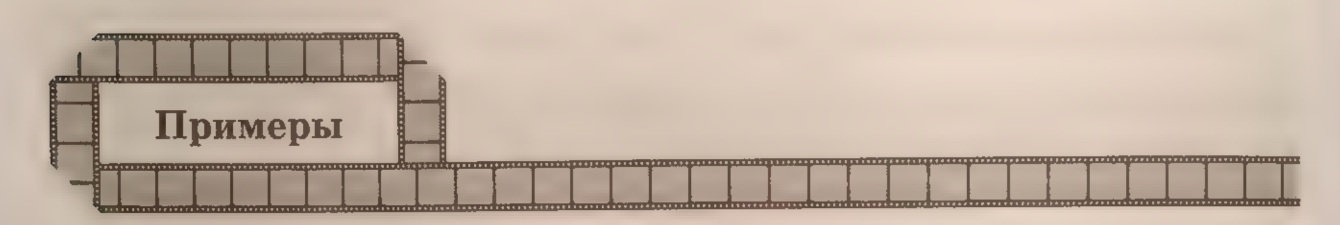
Решениями уравнения $y'' = -\omega^2 y$ **являются функции вида** $y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2)$, где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые условиями задачи.

Равенство $y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2)$ называют *уравнением гармонических колебаний*.

Уравнение $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания (высота волны), φ — начальная фаза колебания, ω — частота колебания, является уравнением гармонического колебания, где $y(t)$ — отклонение точки от положения равновесия в момент времени t.

График функции $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ — синусоида, где A — высота волны, φ — сдвиг графика по оси Ox, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ — период функции.

Например: простое гармоническое колебание совершает проекция точки, вращающейся по окружности с постоянной угловой скоростью ω радиан в секунду вдоль вертикального диаметра вверх и вниз по закону $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.



1. Покажите, что функция $y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ при любых C_1 и C_2 является решением уравнения $y'' = -\omega^2 y$.

Решение.

1) Найдем y':

$$y' = (C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x)' = -C_1\omega\sin\omega x + C_2\omega\cos\omega x$$

2) Найдем y'':

$$y'' = (-C_1\omega\sin\omega x + C_2\omega\cos\omega x)' = -C_1\omega^2\cos\omega x - C_2\omega^2\sin\omega x =$$
$$= -\omega^2(\underbrace{C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x}_{y}) = -\omega^2 y$$

Получили уравнение $y'' = -\omega^2 y$. Значит, функция $y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ является решением уравнения $y'' = -\omega^2 y$.

2. Решите дифференциальное уравнение $y'' = -4y$.

Решение.

$y(x) = C_1\sin(2x + C_2)$

$y(x) = C_1\sin(\omega x + C_2)$
$y'' = -\omega^2 y$
$\omega^2 = 4 \Rightarrow \omega = 2,\ \omega > 0$

Ответ: $y(x) = C_1\sin(2x + C_2)$.

Проверь себя!

Решите уравнение $y'' = -\frac{1}{9}y$.

Ответ: $y(x) = C_1\left(\sin\frac{1}{3}x + C_2\right)$.

Алгоритм 32. Построение графика гармонического колебания, заданного формулой $y = A\sin(\omega x + \varphi_0)$

① Найдите период колебания: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

② Найдите нули функции: $\sin f(x) = 0$ при $f(x) = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\omega x + \varphi_0 = \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi k - \varphi_0}{\omega},\ k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\frac{\varphi_0}{\omega};\ \frac{\pi - \varphi_0}{\omega};\ \frac{2\pi - \varphi_0}{\omega};\ \ldots\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$$

③ Найдите $x_{\max}$ из условия: максимум функция $y = \sin x$ имеет в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$:

$$\omega x + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x_{\max} = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_0}{\omega} + \frac{2\pi k}{\omega},\ k \in \mathbf{Z}$$

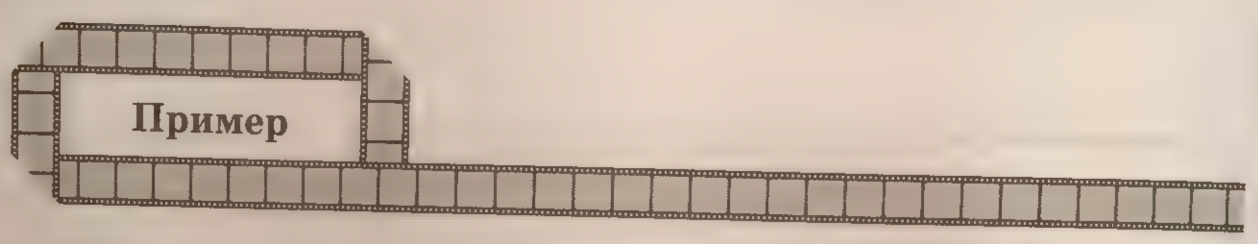
④ Найдите $y_{\max} = y(x_{\max})$.

⑤ Найдите $x_{\min}$ из условия: минимум функция имеет в точках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$:

$$\omega x + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x_{\min} = \frac{-\frac{\pi}{2} - \varphi_0}{\omega} + \frac{2\pi k}{\omega},\ k \in \mathbf{Z}$$

⑥ **Найдите $y_{\min} = y(x_{\min})$.**

⑦ **Постройте синусоиду по точкам, полученным в пунктах 2–6, получите эскиз графика функции $y = A\sin\omega x$. Для более точного построения графика выберите дополнительные точки.**



Постройте эскиз графика функции $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

<u>Построение.</u>

1) Найдем период колебания:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

2) Найдем нули функции:

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z,$$

$$x = -\frac{4}{6}\pi;\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{2}{6}\pi;\ \frac{5}{6}\pi;\ \ldots\ k = -1;\ 0;\ 1;\ \ldots$$

3) Найдем $x_{\max}$:

$$x_{\max} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{2\pi k}{2} = \frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$$

$$x_{\max} = -\frac{11}{12}\pi;\ \frac{\pi}{12};\ \frac{13}{12}\pi;\ \ldots\ k = -1;\ 0;\ 1;\ \ldots$$

4) $y_{\max} = 3\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3$

$y = A\sin(\omega t + \varphi)$

$A = 3;\ \omega = 2;\ \varphi = \frac{\pi}{3}$

$$x = \frac{\pi k - \varphi_0}{\omega},\ k \in Z$$

$$x_{\max} = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_0}{\omega} + \frac{2\pi k}{\omega},\ k \in Z$$

$y_{\max} = A$

5) Найдем x_{min}:

$$x_{min} = \frac{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{2\pi k}{2} = -\frac{5}{12}\pi + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$x_{min} = -\frac{5}{12}\pi;\ \frac{7}{12}\pi;\ \frac{19}{12}\pi;\ \ldots$$

$$x_{min} = \frac{-\frac{\pi}{2} - \varphi_0}{\omega} + \frac{2\pi k}{\omega},\ k \in \mathbf{Z}$$

6) $y_{min} = 3\sin\left(2 \cdot \frac{7}{12}\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{3}{2}\pi = -3$

7) Построим эскиз графика данной функции (рис. 62).

З а м е ч а н и я. 1. График функции $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ получается из графика функции $y = 3\sin 2x$ смещением его на $\frac{\pi}{6}$ влево.

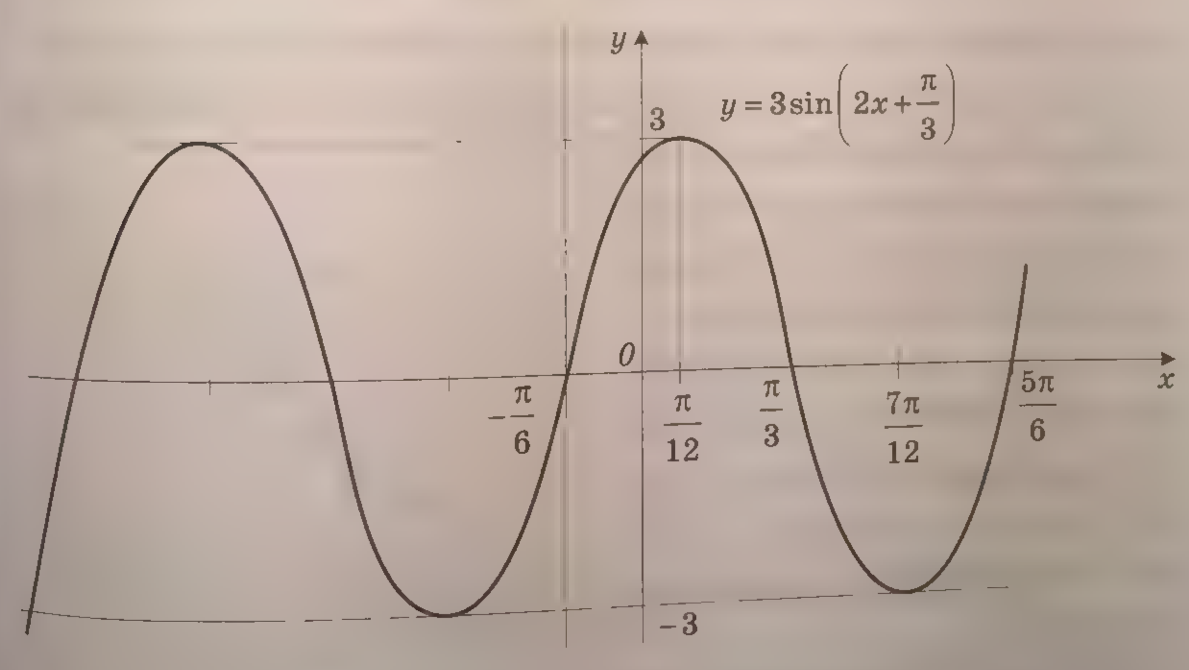
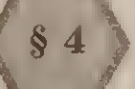


Рис. 62

2. Нули функции можно записать и в двенадцатых долях: $-\frac{8}{12}\pi$; $-\frac{2\pi}{12}$; $\frac{4\pi}{12}$; $\frac{10\pi}{12}$ (для наглядности сравнения чисел).



§ 4 Применение производной к исследованию функций

I. Возрастание и убывание функции

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* ($\uparrow$) на промежутке $J \subset D(f)$, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$.

Теорема 1. *Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $J \subset D(f)$, если в каждой точке этого промежутка $f'(x) > 0$* (рис. 63).

$$f'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)(\uparrow) \text{ на } J$$

На рисунке 63 видно, что в каждой точке промежутка $J = [a; b]$ касательная к графику функции $y = f(x)$ направлена вправо-вверх (ее угловой коэффициент $k > 0 \Rightarrow k = = \operatorname{tg} \alpha = f'(x) > 0$) и график направлен вправо-вверх, т. е. функция возрастает ($x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$).

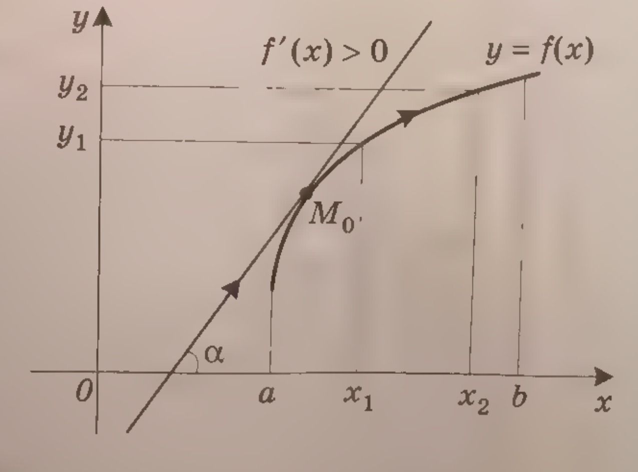


Рис. 63

Замечание. Если на промежутке $J \subset D(f)$ из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) \leq f(x_1)$), то функция $f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)*.

Функции всех этих типов: возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие — имеют общее название — *монотонные*.

Например: докажем, что функции: а) $y = 2x$; б) $y = x^3$ возрастают на R.

а) $y = 2x$: $D(y) = \mathbf{R}$; $y' = (2x)' = 2$; $y'(x) > 0 \Rightarrow y = 2x(\uparrow)$ возрастает на $D(f)$.

б) $y = x^3$: $D(y) = \mathbf{R}$; $y' = (x^3)' = 3x^2 \Rightarrow y'(x) > 0 \Rightarrow y = x^3(\uparrow)$ возрастает на $D(f)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* $(\downarrow)$ на промежутке $J \subset D(f)$, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$.

Теорема 2. *Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $J \subset D(f)$, если в каждой точке этого промежутка $f'(x) < 0$* (рис. 64).

$$f'(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)(\downarrow) \text{ на } J$$

На рисунке 64 видно, что в каждой точке промежутка $J = [a; b]$ касательная к графику функции $y = f(x)$ направлена вправо-вниз $(90^0 < \alpha < 180^0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0$, ее угловой коэффициент $k < 0 \Rightarrow f'(x) < 0)$ и график направлен вправо-вниз, т. е. функция убывает $(x_2 > x_1 \Rightarrow \Rightarrow y_2 < y_1)$.

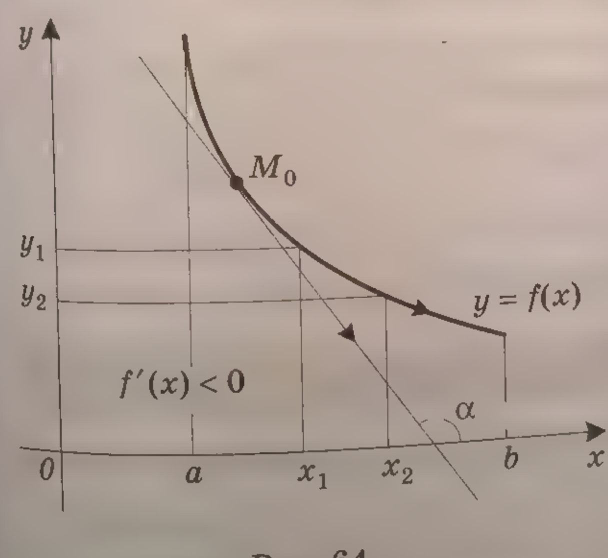


Рис. 64

Например: докажем, что функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на $D(y)$.

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x}(\downarrow)$$

на $D(y)$

З а м е ч а н и е. Знаки $(\uparrow)$ и $(\nearrow)$ условно обозначают возрастание функции, а знаки $(\downarrow)$ и $(\searrow)$ — убывание.

Алгоритм 33 Нахождение промежутков возрастания и убывания функции $y = f(x)$

① Найдите $D(f)$.

② Найдите $f'(x)$.

③ Решите неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на $D(f)$.

④ Запишите промежуток значений x, где $f'(x) > 0$ — это промежуток возрастания функции $y = f(x)$, а промежуток значений x, где $f'(x) < 0$ — это промежуток убывания функции $y = f(x)$.

⑤ Запишите ответ полностью. *Например,* $y = f(x)$ возрастает (↑) на промежутке J и убывает (↓) на промежутке Q.

Замечание. Если функция $y = f(x)$ определена на концах промежутка (в точках $x = a$ и $x = b$), то промежуток возрастания или убывания закрытый: $[a; b]$. Если функция $y = f(x)$ не определена в точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$, то промежуток монотонности (только убывания или только возрастания) открытый: $(a; b)$.

Внимание! Если промежутков монотонности несколько, то между промежутками ***нельзя*** **(!)** ставить знак объединения ($\cup$), а нужно писать, например, словами: функция возрастает на промежутках $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$.



1. ЭМ. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = \log_{0,5}(2x^2 - 3x - 2)$.

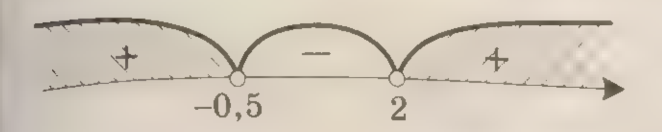
Решение.

1) Найдите $D(y)$ функции:

$2x^2 - 3x - 2 > 0$

$2(x - 2)(x + 0,5) > 0$

| $y = \log_{0,5} f(x)$ имеет смысл при $f(x) > 0$



$D(y)=(-\infty;-0,5)\cup(2;+\infty)$

$2x^2-3x-2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}$

$x_1=2;\ x_2=-0,5$

$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

2) Найдите производную функции $y=\log_{0,5} f(x)$:

$$y'=\frac{(2x^2-3x-2)'}{(2x^2-3x-2)\ln 0,5}=\frac{4x-3}{2(x-2)(x+0,5)\ln 0,5}$$

3)–4) Найдите знак производной на ОДЗ:

а) $x>2$; пусть $x=3$, тогда

$$y'(3)=\frac{4\cdot 3-3}{2\cdot 1\cdot 3,5\cdot \ln 0,5}=\frac{9}{7\ln 0,5}<0$$

На промежутке $(2;+\infty)$ функция убывает.

б) $x<-0,5$; пусть $x=-1$, тогда

$$y'(-1)=\frac{-4-3}{2(-3)\cdot(-0,5)\ln 0,5}=\frac{-7}{-3\ln 0,5}>0$$

$\ln_e a=\ln a$,
$e\approx 2,718$

$\ln 0,5<0$
$\ln 0,5=\ln 2^{-1}=-\ln 2<0$

$\dfrac{-7}{\ln 0,5}=\dfrac{-7}{-\ln 2}>0$

На промежутке $(-\infty;\ -0,5)$ функция возрастает.

Ответ: $y=f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty;\ -0,5)$ и убывает на промежутке $(2;+\infty)$.

2. ЭМ. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком (рис. 65). При каких значениях x $f'(x)<0$ и $f'(x)>0$?

Решение.

1) $D(f)=[-3,5;\ 6]$

2) Опустим перпендикуляры из точек A, D, C, B на ось Ox: AA_1, DD_1, CC_1, BB_1.

Функция $y=f(x)$ возрастает (↗), если на $(a;b)$ график направлен вверх-вправо.
$f'(x)>0$ на $(a;b)$

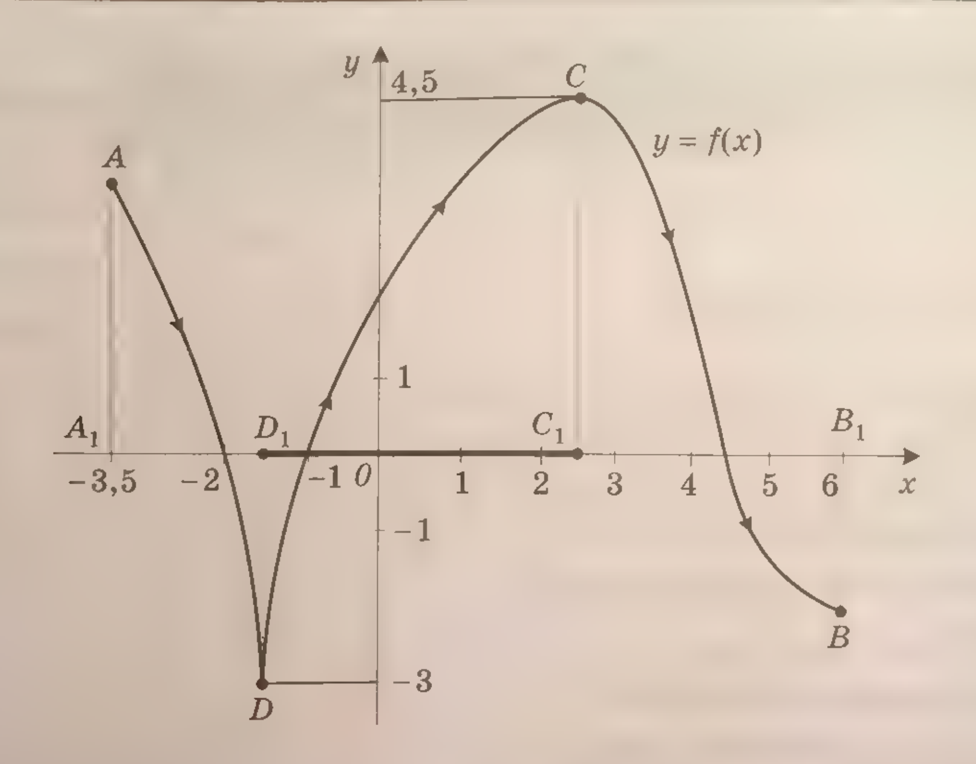


Рис. 65

3) Определим промежутки убывания и возрастания функции:
промежуток возрастания функции $y = f(x)$: $[-1{,}5;2{,}5]$
промежутки убывания функции $y = f(x)$: $[-3{,}5;-1{,}5]$ и $[2{,}5;6]$

Функция $y = f(x)$ убывает (↘), если на $(a;b)$ график направлен вниз-вправо.
$f'(x) < 0$ на $(a;b)$

Ответ: $f'(x) > 0$ на интервале $(-1{,}5;\ 2{,}5)$ и $f'(x) < 0$ на интервалах $(-3{,}5;-1{,}5)$ и $(2{,}5;6)$.

Внимание! $f'(x) \gtrless 0$ — строгие неравенства, поэтому при записи ответа концы промежутков исключены.

3. ЕГЭ. На рисунке 66 изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$. Укажите в ответе число промежутков возрастания.

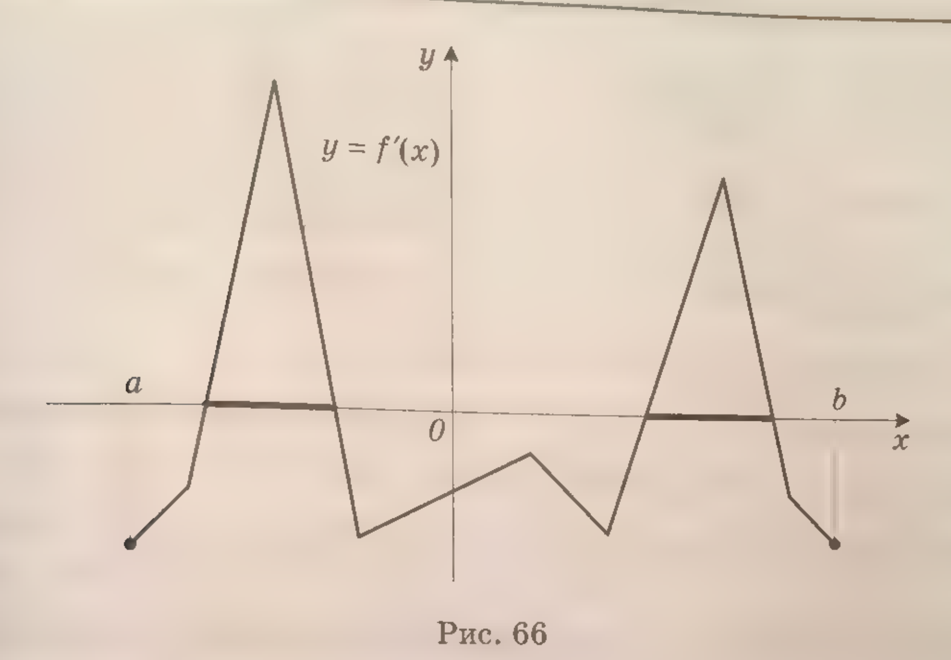


Рис. 66

Решение.

Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке, если для всех x из этого промежутка $f'(x) > 0$, т. е. там, где график производной функции расположен над осью Ox. Таких промежутков два (на рисунке они выделены).

(Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке, где $f'(x) < 0$, т. е. там, где график производной функции расположен под осью Ox. Таких промежутков три, но об этом не спрашивается в условии задачи и здесь это дано как разъяснение.)

Ответ: два промежутка возрастания.

4. ЕГЭ. Найдите длину промежутка возрастания функции $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$.

Решение.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$ | $x^2 + 1 \neq 0$ при $x \in R$

2) Найдем $y'(x)$: | $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\left(\frac{5x}{x^2+1}\right)' = \frac{(5x)'(x^2+1) - (x^2+1)' \cdot 5x}{(x^2+1)^2} =$$

| $(x^2+1)' = 2x$

$$=\frac{5x^2+5-10x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}$$

3) Решим неравенство:

$f'(x)>0,\ \frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+1)^2>0 \text{ при } x\in \mathbf{R}\\ 5-5x^2>0\end{cases}$

$5(1-x^2)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

4) $f(-1)=\frac{-5}{2}=-2{,}5$

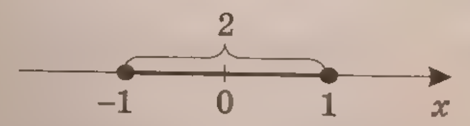
$f(1)=\frac{5}{2}=2{,}5$

Если $f'(x)>0$, то $y=f(x)$ (↗) возрастает на $D(f)$

$\frac{a}{b}>0$, если $b>0$, то и $a>0$

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

$f(x)$ определена на концах отрезка $[-1;1]$, значит, она возрастает на этом отрезке, длина отрезка равна 2



Ответ: длина промежутка возрастания функции $y=f(x)$ равна 2.

5. ЕГЭ. При каком наибольшем значении a функция $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+ax+7$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$

2) Найдем $f'(x)$:

$f'(x)=\left(\frac{2}{3}x^3-ax^2+ax+7\right)'=2x^2-2ax+a$

$f'(x)>0,\ 2x^2-2ax+a>0$

$f(x)$ — многочлен, значит, $D(f)=\mathbf{R}$

$y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема

Если $f'(x)>0$, то $y=f(x)$ (↗)

$\frac{D}{4} = a^2 - 2a,\ D < 0 \Rightarrow a(a-2) < 0$

+ 0 2 + a

$(kx^n)' = knx^{n-1}$

$ax^2 + bx + c > 0$,

если $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$; $a = 2$

Получили $f'(x) > 0$ при любом x, если $a \in (0;2)$. Проверим знак производной на концах промежутка. При $a = 2$; $f'(x) = 2(x-1)^2 > 0$, при $a = 0$; $f'(x) = 2x^2 > 0$, значит, $f(x)$ возрастает, если $a \in [0;2]$.

Ответ: $a = 2$ — наибольшее значение, при котором функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

6. ЕГЭ. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

Решение.

1) $D(y) = (0;+\infty)$

$\ln x$ имеет смысл при $x > 0$

Дробь $\frac{1}{x}$ имеет смысл при $x \neq 0$

2) Найдем $y'(x)$:

$$\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)' = (\ln x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

3) Решим неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на $D(y)$:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x^2} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

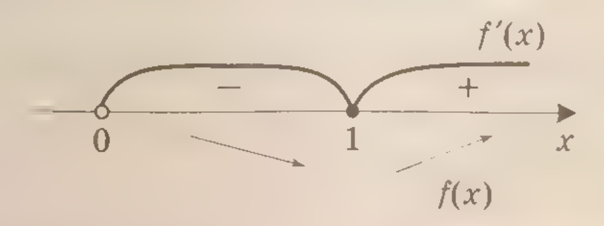
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x^2} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$\frac{a}{b} > 0$; если $b > 0$, то $a > 0$

$\frac{a}{b} < 0$; если $b > 0$, то $a < 0$

$f'(x) < 0$ на промежутке $(0;1)$, значит, $f(x)$ (↘) убывает на промежутке $(0;1]$

$f'(x) > 0$ на промежутке $(1;+\infty)$, значит, $f(x)$ (↗) возрастает на промежутке $[1;+\infty)$



Ответ: $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[1;+\infty)$ и убывает на промежутке $(0;1]$.

Внимание! При определении промежутков монотонности убедитесь, что они входят в $D(f)$.

Проверь себя!

1. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 3$.

2. Определите знак производной функции $y = f(x)$ на промежутках, если промежутки возрастания функции $[-4;-2]$ и $[1;3]$, а промежуток убывания $[-2;1]$.

Ответ: **1.** $f(x)$ возрастает (↑) на промежутках $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]$ и $\left[0;\sqrt{2}\right]$; $f(x)$ убывает (↓) на промежутках $\left[-\sqrt{2};0\right]$ и $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **2.** $f'(x) > 0$ на промежутках $(-4;-2)$ и $(1;\ 3)$; $f'(x) < 0$ на промежутке $(-2;1)$.

II. Максимум и минимум функции

Окрестностью точки x_0 является любой интервал $(x_0 - h;\ x_0 + h)$, где h — некоторое число.

Определение 1. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$.

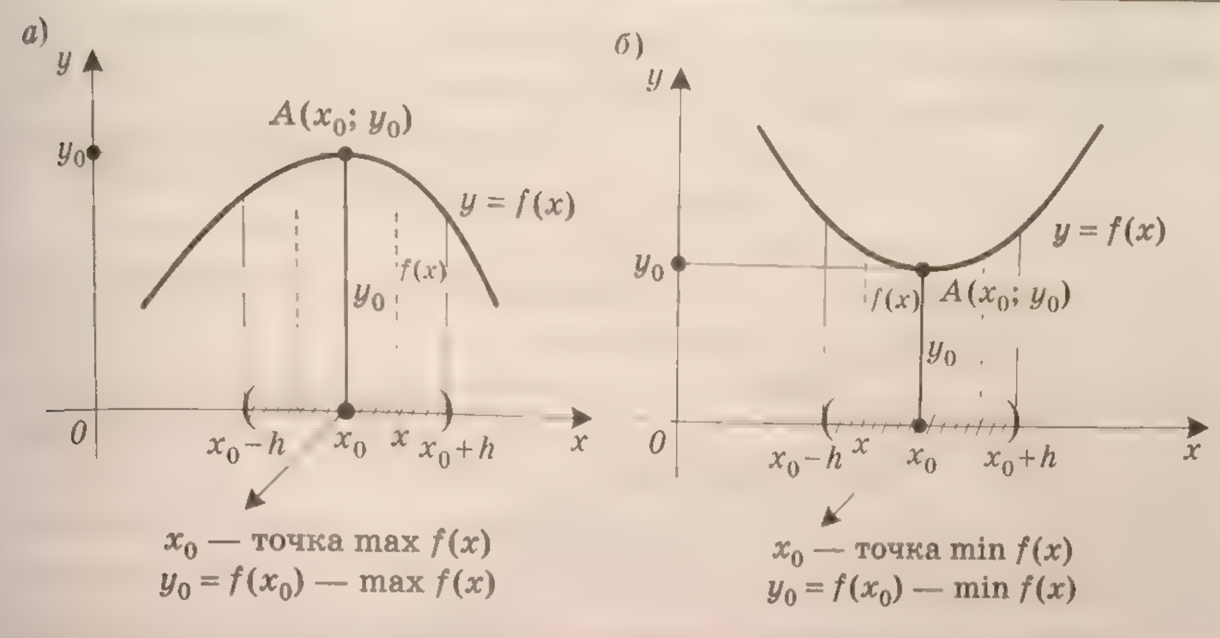


Рис. 67

Значение $f(x_0)$ называется *максимумом функции* $y = f(x)$ и обозначается условно $y_{max} = f(x_0)$ (рис. 67, *а*).

Определение 2. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$ (рис. 67, *б*).

Значение $f(x_0)$ называется *минимумом функции* $y = f(x)$ и обозначается условно $y_{min} = f(x_0)$ (рис. 67, *б*).

Определение 3. Максимум и минимум функции называются *экстремумами функции* (это $f(x_0)$, а x_0 — точка экстремума).

З а м е ч а н и я. 1. Если нельзя указать окрестность точки x_0, то нельзя говорить о наличии экстремума в этой точке (рис. 68, *а*; *б*).

2. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке J, то на этом промежутке нет точек экстремума, так как не выполняется определение максимума $f(x_0) > f(x)$ или минимума $f(x_0) < f(x)$ в окрестности точки x_0 (рис. 69, *а*, *б*).

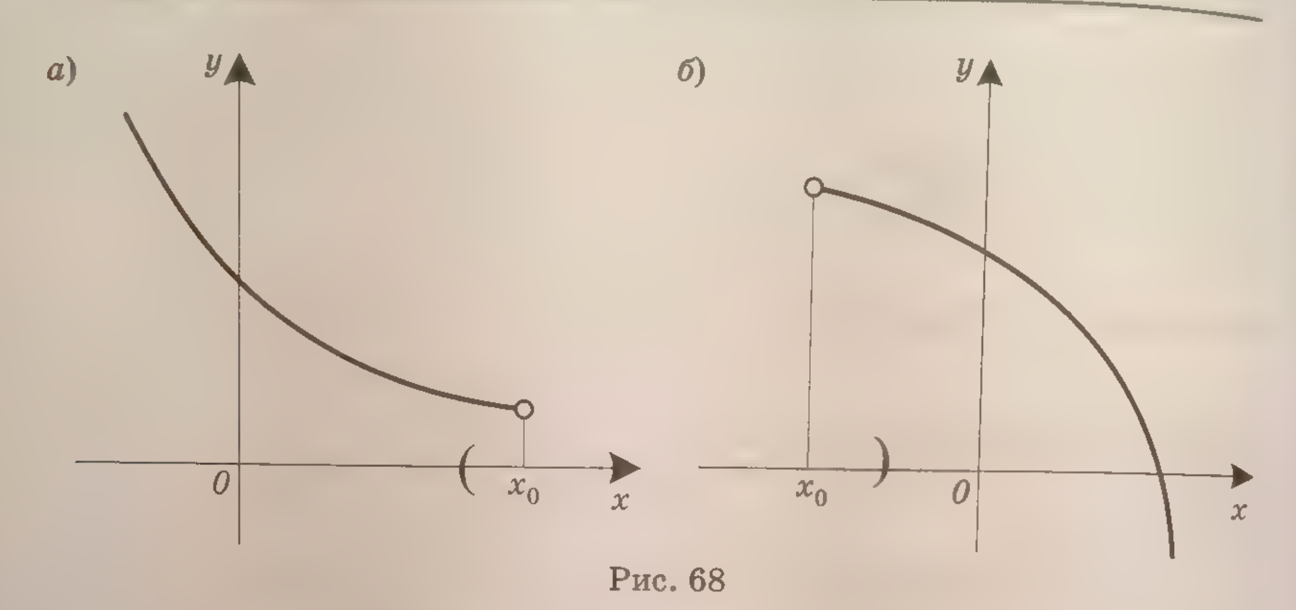


Рис. 68

3. Если на промежутке J $f'(x)=a$ — постоянное число ($a \neq 0$), то точек экстремума функции на этом промежутке быть не может.

Стационарной точкой функции $y=f(x)$ называется точка x_0, в которой производная равна нулю ($f'(x_0)=0$).

Критической точкой функции $y=f(x)$ называется внутренняя точка области определения, в которой функция непрерывна и производная равна нулю или не существует.

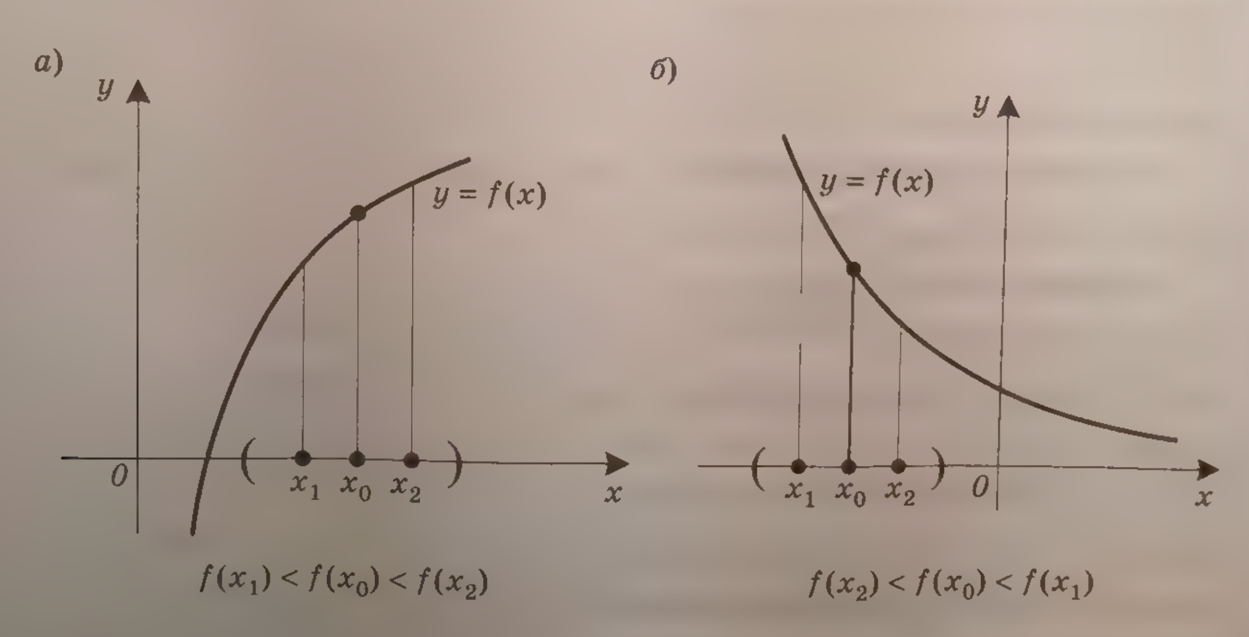


Рис. 69

Теорема Ферма (*необходимое условие* существования экстремума). **Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и в этой точке существует производная функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.**

Обратное утверждение не всегда верно.

Достаточное условие существования экстремума в точке x_0: **если при переходе через стационарную точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка максимума функции $f(x)$, а если производная $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$.**

Замечание. Максимум (минимум) функции носит локальный (местный) характер в окрестности точки. Это значит, что, говоря о максимуме (минимуме) функции, надо обязательно указывать промежуток, о котором идет речь.

Алгоритм 34 **Нахождение максимума и минимума через первую производную (правило I)**

① Найдите область определения функции $D(f)$.

② Найдите производную функции $f'(x)$.

③ Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$ (стационарные точки).

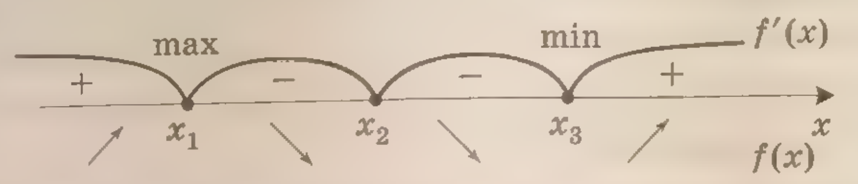
④ Изобразите ось Ox и отметьте на ней $D(f)$, стационарные точки (п. 3), изобразите дугами промежутки, на которые разбивается $D(f)$. Подпишите над осью $f'(x)$, под осью $f(x)$.

⑤ Определите знак производной в каждом промежутке (методом интервалов или через пробное число).

⑥ Поставьте знак производной в каждом промежутке (над осью), а стрелкой укажите возрастание (↗) или убывание (↘) функции (под осью).

⑦ Определите, как изменила знак производная функции $f(x)$ при переходе через точки x_1, x_2, x_3: если $f'(x)$ изменила знак с «+» на «−», то x_1 — точка максимума; если $f'(x)$ изменила знак с «−» на «+», то x_3 — точка минимума; если $f'(x)$ не изменила знак, то x_2 может быть *точкой перегиба*.

Например:



(8) Найдите значения функции в точках максимума, минимума, подставив соответствующие значения x в формулу заданной функции $y = f(x)$ (*например*, получите $y_{\max} = f(x_1)$ или $y_{\min} = f(x_3)$).

Замечания. 1. Изображая на оси Ox (п. 4) $D(f)$, стационарные точки, промежутки, на которые разбивается $D(f)$, масштаб учитывать необязательно. Поведение функции $f(x)$ можно показать так, как это сделано на рисунке 70.

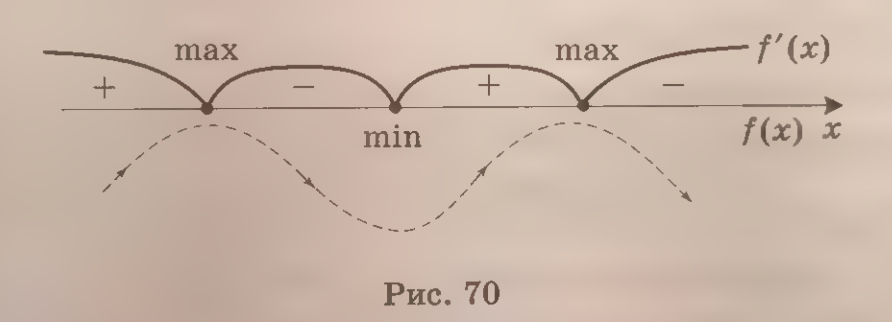
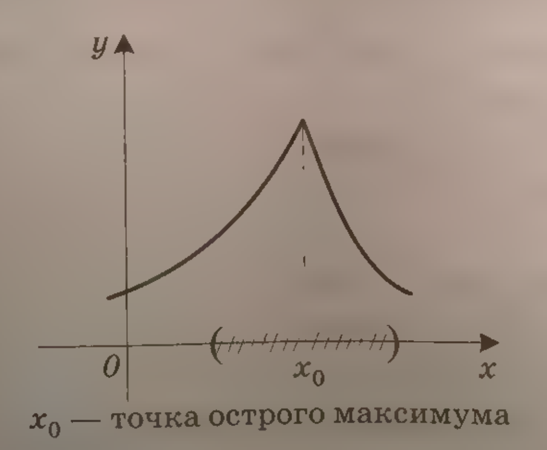
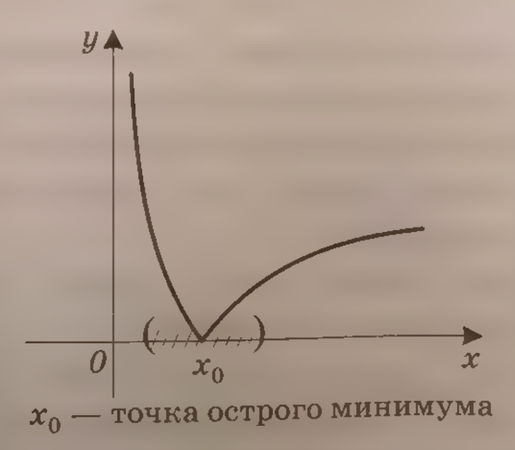


Рис. 70

2. Если $f'(x)$ не существует в точке x_0 и имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, а $x_0 \in D(f)$ и является ее внутренней точкой, то x_0 может быть точкой острого максимума или острого минимума. Такие примеры приведены на рисунке 71.



x_0 — точка острого максимума



x_0 — точка острого минимума

Рис. 71



ЭМ. Найдите точки экстремума функции $y=-x^3-3x^2+24x-4$ на промежутке $\left(-5;\frac{1}{5}\right)$.

Решение.

1) $D(y)=\left(-5;\frac{1}{5}\right)$ по условию

2) Найдем $y'(x)$:

$y'=\left(-x^3-3x^2+24x-4\right)'=-3x^2-6x+24$

3) Найдем стационарные точки на $D(y)$:

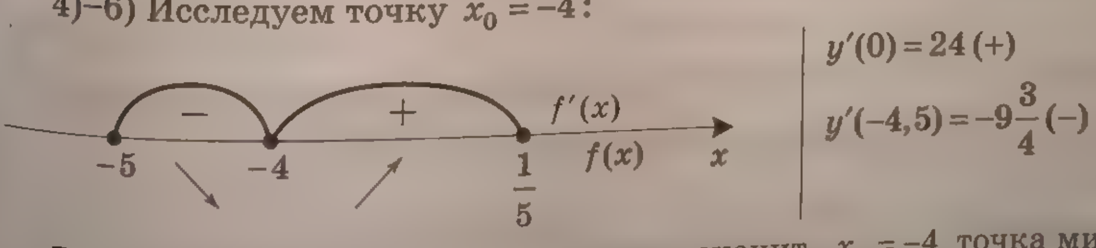
$y'(x)=0$

$y=f(x)$ — многочлен, функция непрерывная и дифференцируемая на промежутке $\left(-5;\frac{1}{5}\right)$

$-3x^2-6x+24=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0;\ \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=2\end{array}\right.$

$-4\in\left(-5;\frac{1}{5}\right),\ \ 2\notin\left(-5;\frac{1}{5}\right)$

4)–6) Исследуем точку $x_0=-4$:



$y'(0)=24\,(+)$

$y'(-4{,}5)=-9\frac{3}{4}\,(-)$

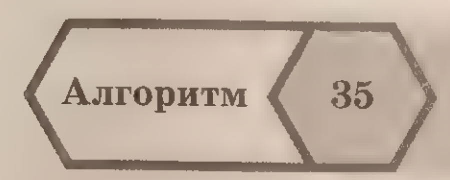
7) $y'(x)$ изменила знак с «−» на «+», значит, $x_0=-4$ точка минимума.

Ответ: $x_0=-4$ — точка минимума функции $f(x)$ на промежутке $\left(-5;\frac{1}{5}\right)$.

Проверь себя!

Найдите экстремумы функции $y=-3x^2+x^3$.

Ответ: $y_{\max}=0$; $y_{\min}=-4$.



Нахождение максимума и минимума через вторую производную (правило II)

① Найдите область определения функции $D(f)$.

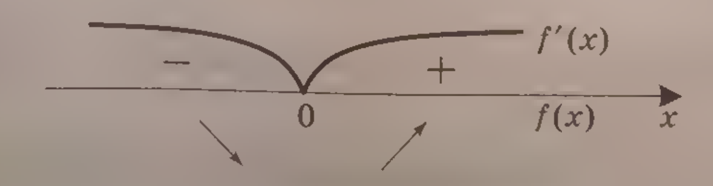
② Найдите производную функции $f'(x)$.

③ Найдите корни уравнения $f'(x)=0$ (стационарные точки).

④ Найдите вторую производную: $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$.

⑤ Найдите значения второй производной в стационарных точках: если $f''(x_1)>0$, то x_1 — точка минимума; если $f''(x_2)<0$, то x_2 — точка максимума; если $f''(x_3)=0$ и $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_3, то x_3 — точка перегиба графика функции; если $f''(x)$ не меняет знак, то найдите экстремум по правилу I.

Например: для функции $y=x^4$ производная $f'(x)=4x^3$; $4x^3=$ $=0\Rightarrow x=0$ (стационарная точка); $f''(x)=12x^2$; вторая производная $f''(0)=0$, $f''(x)$ не меняет знак при переходе через точку $x=0$. Значит, найдите точку экстремума по правилу I: $y'=4x^3$.



Первая производная изменила знак с «−» на «+», значит, $x=0$ — точка минимума. График функции $y=x^4$ это подтверждает (рис. 72).

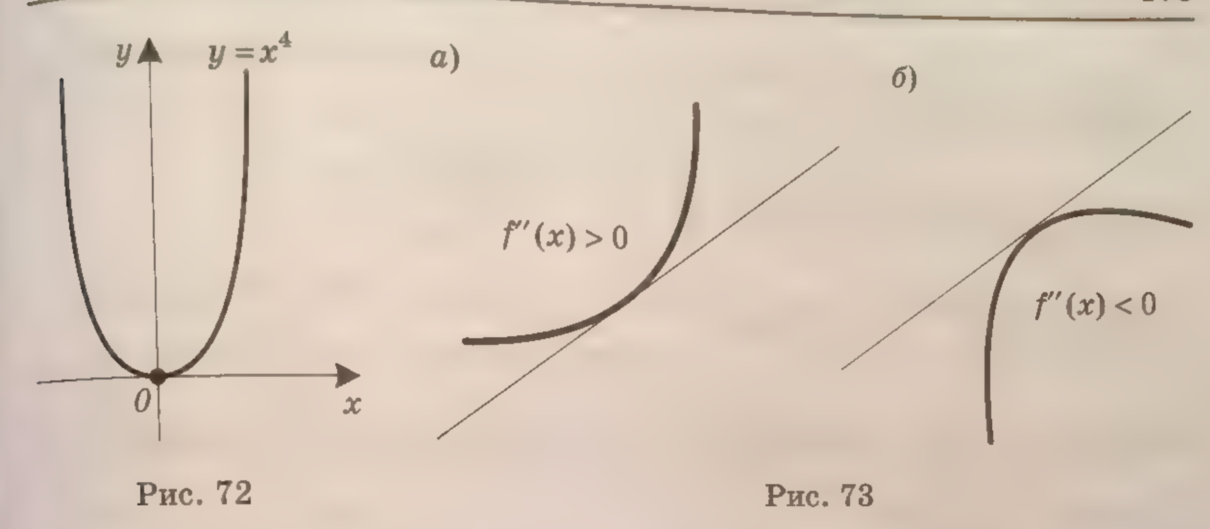


Рис. 72

Рис. 73

⑥ Найдите максимум, минимум функции, подставив x_0 в формулу заданной функции $y = f(x)$. Получите $y_{max} = f(x_0)$ или $y_{min} = f(x_0)$.

З а м е ч а н и я. 1. Если $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый или выпуклый вниз (рис. 73, *а*).

2. Если $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый вверх (рис. 73, *б*).



1. ЭМ. Найдите значение функции $y = -x + 2e^x$ в точке экстремума функции.

Решение (по правилу II).

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2) $y'(x)$:

$y' = \left(-x + 2e^x\right)' = -1 + 2e^x$

3) Решим уравнение $f'(x) = 0$:

$-1 + 2e^x = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2}$

$(kx)' = k$; $(ce^x)' = ce^x$

$\ln e^x = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x\ln e = \ln\frac{1}{2}$

$\ln e = 1 \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2}$

4) $y''(x) = \left(-1 + 2e^x\right)' = 2e^x$

5) $y''\left(\ln\frac{1}{2}\right) = 2e^{\ln\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$1 > 0 \Rightarrow x_0 = \ln\frac{1}{2}$ — точка min

6) $f(x_0) = f\left(\ln\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} + 2e^{\ln\frac{1}{2}} =$

$= \ln 2 + 1 - \min f(x)$

$a^{\log_a b} = b$

$a = e$

$y''(x_0) > 0$

$f(x) = -x + 2e^x$

$-\ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \ln 2$

$e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Ответ: $f\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \ln 2 + 1 - \min f(x)$.

2. ЕГЭ. Найдите значение функции в точках максимума:

$$y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x - 29\frac{2}{3}$$

Решение (по правилу I).

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$

$P(x)$ — многочлен

Функция $y = f(x)$ непрерывная и дифференцируемая на $D(y)$

2) $y' = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x - 29\frac{2}{3}\right)' =$

$= -\frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} + 12 - 0 = -x^2 + x + 12$

$(u + v)' = u' + v'$

$\left(\frac{x^n}{c}\right)' = \frac{n}{c}x^{n-1}$

$(kx)' = k$; $(c)' = 0$

3) $y'(x) = 0$:

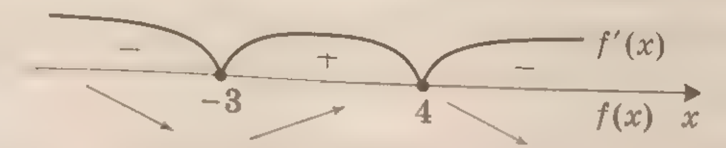
$-x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -3$; $x_2 = 4$

По формулам Виета

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

4)–6) Исследуем точки $x=-3$ и $x=4$ на экстремум:



7) Производная поменяла знак с «+» на «–» при переходе через точку $x=4$, значит, $x_0=4$ — точка $\max f(x)$.

8) $y_{\max}=f(4)=-\frac{4^3}{3}+\frac{4^2}{2}+12\cdot4-29\frac{2}{3}=-21\frac{1}{3}+8+48-29\frac{2}{3}=-51+56=5$

Ответ: $y_{\max}=5$.

3. ЕГЭ. При каком значении a функция

$$y=\sqrt[5]{ax^2+15x-1}$$

имеет точку максимума в точке $x_0=1{,}5$?

Решение.

1) Функция $y=\sqrt[5]{f(x)}$ имеет смысл при $x\in\boldsymbol{R}$, $D(y)=\boldsymbol{R}$.

2) Функция непрерывна и имеет производную:

$$y'(x)=\left(\sqrt[5]{ax^2+15x-1}\right)'=$$

$$=\frac{\left(ax^2+15x-1\right)'}{5\sqrt[5]{\left(ax^2+15x-1\right)^4}}=$$

$$=\frac{2ax+15}{5\sqrt[5]{\left(ax^2+15x-1\right)^4}}$$

$$\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$$

$$\left(\sqrt[5]{ax^2+15x-1}\right)'=$$

$$=\left(\left(ax^2+15x-1\right)^{\frac{1}{5}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{5}\left(ax^2+15x-1\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(ax^2+15x-1\right)'$$

3) Если функция $y=\sqrt[5]{f(x)}$ в точке $x_0=1{,}5$ имеет максимум, то $y'(x_0)=0$ (теорема Ферма):

$$y'(1{,}5)=\frac{3a+15}{5\sqrt[5]{\left(a\cdot2{,}25+22{,}5-1\right)^4}}=0$$

$$\frac{m}{n}=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\n\neq0\end{cases}$$

$3a+15=0 \Rightarrow 3a=-15$

(при $a=-5$ выражение $a\cdot 2{,}25+22{,}5-1\neq 0$)

Ответ: функция имеет максимум в точке $x_0=1{,}5$ при $a=-5$.

4. ЭМ. Найдите точки минимума функции

$$y=2\sqrt{3}\cos x+2\sin x-2x+1$$

Решение.

1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Функция дифференцируема во всех точках $D(y)$.

2)—4). Найдем стационарные точки функции (корни уравнения $f'(x)=0$):

$$y'=\left(2\sqrt{3}\cos x+2\sin x-2x+1\right)'=$$
$$=-2\sqrt{3}\sin x+2\cos x-2$$

$(u+v)'=u'+v'$

$(k\cos x)'=-k\sin x$

$$y'=0 \Rightarrow -2\sqrt{3}\sin x+2\cos x-2=0 \,\Big|\, :(-4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}=0$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\frac{1}{2}=0$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z} \\ x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{5}{6}\pi+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$

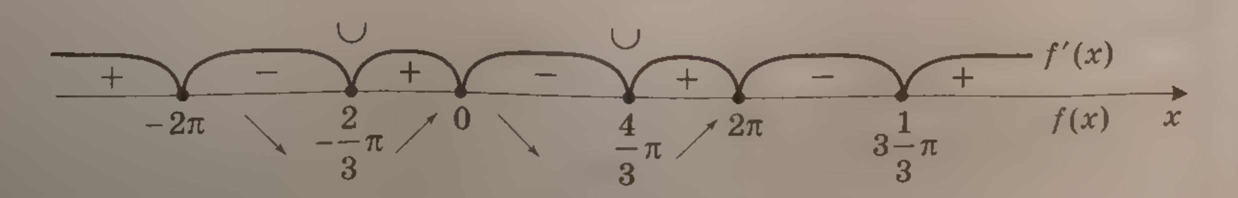
$\sin y=-m$

$y_1=-\arcsin m+2\pi k$

$y_2=-(\pi-\arcsin m)+2\pi k$

(см. стр. 368)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi k,\ k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots,\ \text{т.е. } x=0;\ \pm2\pi;\ \pm4\pi;\ \ldots \\ x=-\dfrac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n=0;\ \pm1;\ \ldots,\ \text{т.е. } x=-\dfrac{2}{3}\pi;\ \dfrac{4}{3}\pi;\ \ldots \end{array}\right.$$



5)–6) Определим знаки производной на отрезке $[0; 2\pi]$, равном периоду.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{3}-2=-\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-2=-3+1-2=-4<0$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{3}+2\cos\frac{5\pi}{3}-2=$$

$$=-2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cdot\frac{1}{2}-2=3+1-2=2>0$$

Производная при переходе через точку $x=\frac{4\pi}{3}$ поменяла знак с «–» на «+», значит, $x=\frac{4\pi}{3}$ — точка минимума на промежутке $[0; 2\pi]$, равном периоду функции, поэтому на остальных промежутках $D(y)$ знак производной будет повторяться в силу периодичности:

$$x_{\min}=\frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$$

Ответ: $x_{\min}=\frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$

Проверь себя!

ЭМ. Найдите точки экстремума функции $f(x)=3x^4-4x^3+2.$

Ответ: $x_{\min}=1.$

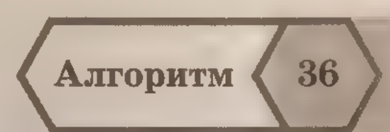
III. Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. *Наибольшим (наименьшим)* значением непрерывной функции на промежутке J из области определения (или на всей области определения) называется самое большое (самое меньшее) значение функции на этом промежутке.

З а м е ч а н и е. Выше было сказано, что максимум и минимум функции носят локальный (местный) характер в окрестности точки,

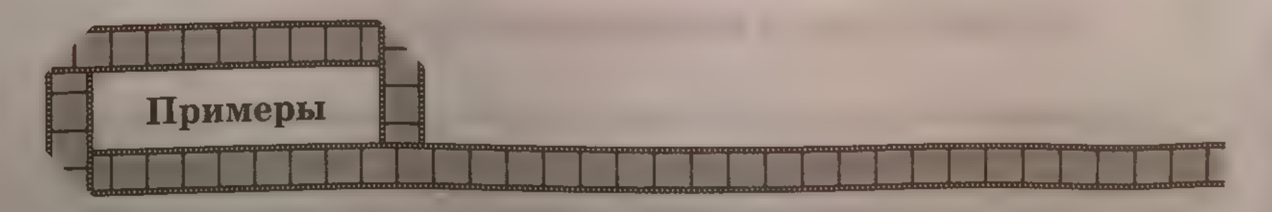
а наибольшее (наименьшее) значение функции находится на отрезке J или $D(f)$.

Иногда максимум (минимум) функции совпадает с наибольшим (наименьшим) значением функции. Например, у функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ они равны 1 и –1 соответственно.



Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Уточните, входит ли заданый отрезок $[a;b]$ в $D(f)$.
2. Найдите производную функции $f'(x)$.
3. Найдите стационарные точки, решив уравнение $f'(x) = 0$, и выберите из них те, которые входят в промежуток $[a; b]$.
4. Найдите точки x_m, в которых функция не имеет производной (критические точки).
5. Найдите значения $f(a)$, $f(b)$, $f(x_k)$ и $f(x_m)$.
6. Сравните значения функции, полученные в пункте 5, и выберите самое большое и самое маленькое.
7. Запишите ответ словами «наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке $[a;b]$ равно $f(x_0)$» или символически: $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0) = \ldots$; $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0) = \ldots$.



1. ЭМ. Дана функция $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x + 1)$. Найдите наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение.

1) $J = [0;2] \subset D(f)$

2) $f'(x) = \left(x^3 - x^2 + 2\right)' = 3x^2 - 2x$

3) Решим уравнение $f'(x) = 0$:

$3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{3}$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$\left(x^2 - 2x + 2\right)(x + 1) =$

$= x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 - 2x + 2 =$

$= x^3 - x^2 + 2$

$ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \\ D(f) \end{cases}$

4) $0 \in [0;\ 2];\ \frac{2}{3} \in [0;\ 2]$

5) Найдем $f(0);\ f(2);\ f\left(\frac{2}{3}\right)$:

$f(0) = 2;\ f(2) = 8 - 4 + 2 = 6$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + 2 = 2 - \frac{4}{27} = 1\frac{23}{27}$

6) Из чисел 2, $1\frac{23}{27}$ и 6 выбираем наименьшее $1\frac{23}{27}$.

Ответ: $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 1\frac{23}{27}$.

Полезный совет

Если $D(y) = (-\infty; +\infty)$, или $(a;b)$, или $(-\infty;a)$, или $(b;+\infty)$ (открытый промежуток), то найдите экстремумы на этих промежутках, и если экстремум *единственный*, то это значит, что $\max f(x)$ — наибольшее значение, а $\min f(x)$ — наименьшее значение функции на этом промежутке.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Решение.

1) $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

2) $y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

3) Решим уравнение $f'(x) = 0$:

$$\frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{cases}$$

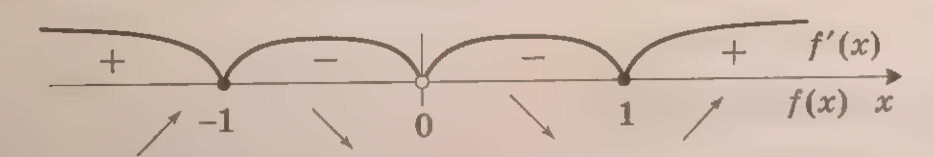
$y = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$

$\frac{a}{b}$ имеет смысл, $b \neq 0$

$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$\frac{a}{b} = 0$, если $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

4) Найдем точки экстремума функции $y = f(x)$ (по правилу I).



5) $x=-1$ — точка максимума; $f(-1) = -2 - \max f(x)$; $x=1$ — точка минимума; $f(1) = 2 - \min f(x)$

Максимум единственный на промежутке $(-\infty;0)$, поэтому $y_{\max} = -2$ — наибольшее значение $f(x)$ на промежутке $(-\infty;0)$. Минимум единственный на промежутке $(0;+\infty)$, значит, $y_{\min} = 2$ — наименьшее значение функции $y = f(x)$ на этом промежутке.

Ответ: $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1) = -2$; $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = 2$.

Проверь себя!

ЭМ. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке $[-1;4]$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;4]} y(x) = y(0) = -3$; $\min\limits_{[-1;4]} y(x) = y(3) = -30$.

IV. Построение графиков функций с помощью производной

Кривая L является графиком функции, если каждая вертикальная прямая $x = a$ пересекает кривую L только в одной точке.

Если прямая $x = a$ пересекает кривую L в точке $(a;b)$, то $f(a) = b$ (рис. 74, *а*).

Если прямая $x = a_1$ не пересекает кривую L_1, то в точке $x = a_1$ функция $y = f(x)$ не определена (рис. 74, *б*).

Если прямая $x = a_2$ пересекает кривую в нескольких точках, то кривая L_2 не является графиком функции (рис. 74, *в*).

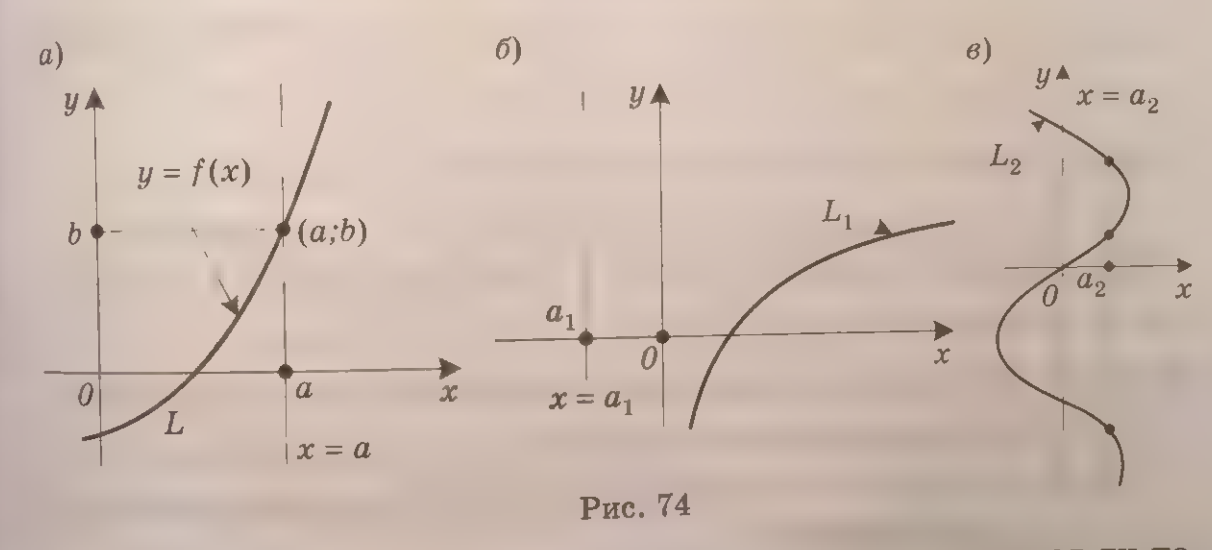
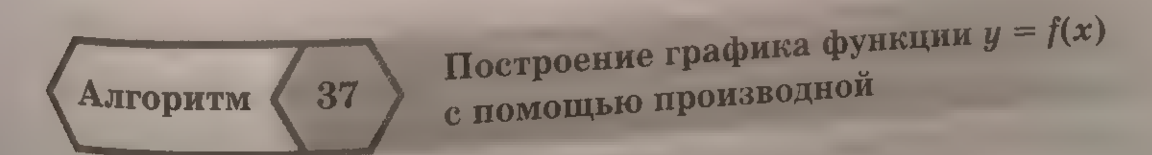


Рис. 74

Используя сказанное, всегда можно проверить, является ли построенная вами линия графиком функции, для этого достаточно провести прямую $x = a$ и убедиться, что точка пересечения с графиком только одна.



Построение графика функции $y = f(x)$ с помощью производной

① Найдите $D(f)$.

② Определите четность, нечетность функции для установления симметрии графика относительно оси Oy или точки O (0; 0).

③ Исследуйте функцию $y = f(x)$ на экстремумы (см. А–34, 35). Составьте таблицу значений функции и ее производных.

Например:

x	$(a;x_0)$	x_0	$(x_0;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	$(x_2;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$ ∪	↗	$f(x_1)$ ∩	↘	$f(x_2)$ ∪	↗

④ Найдите точки пересечения графика с осями координат:

а) с осью Oy: $x = 0 \Rightarrow y = f(0)$ (точка $(0;f(0))$);

б) с осью Ox: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, если корни найти трудно, то перейдите к пункту 5.

⑤ Для точности построения графика вычислите значения функции, взяв дополнительные значения x вблизи экстремальных точек и значения x вдали от них (для определения дальнейшего направления ветвей графика).

⑥ Постройте систему координат xOy.

а) На оси Ox отметьте корни (если они есть) и точки экстремума (x_k); если есть точки разрыва функции, то проведите через них вертикальные асимптоты;

б) постройте точки экстремума $(x_k; y_k)$ (можно карандашом изобразить максимум или минимум функции в виде «луночки ∩, ∪», чтобы понять дальнейшее направление графика);

в) на оси Oy отметьте точку пересечения графика с осью Oy;

г) постройте дополнительные (контрольные) точки;

д) соедините плавной линией точки, полученные в пунктах *а*, *б*, *в*, *г*, получите эскиз графика искомой функции.



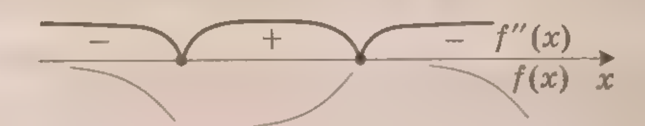
Если желаете построить более точный график функции, то найдите точки перегиба графика и выпуклость (вогнутость) графика. Для этого:

1) найдите $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$;

2) найдите корни уравнения $f''(x) = 0$ и отметьте их на оси x;

3) определите знак $f''(x)$ на каждом промежутке.

Например:



Если $f''(x) > 0$, то график выше касательной ( ) вогнутый; если $f''(x) < 0$, то график ниже касательной ( ) выпуклый.

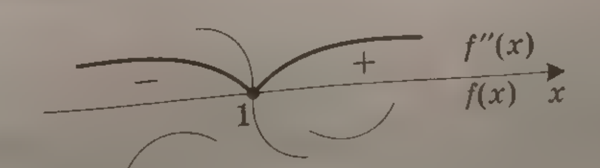
Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через стационарную точку (п. 2), то график функции $y = f(x)$ имеет точку перегиба; если знак $f''(x)$ не изменяется, то точки перегиба нет.

Например: найдем точки перегиба функции $y = \frac{1}{3}\left(x^3 - 3x^2\right)$.

1) Найдем y'': $y' = \frac{1}{3}\left(x^3 - 3x^2\right)' = \frac{1}{3}\left(3x^2 - 6x\right) = x^2 - 2x$; $y'' = \left(x^2 - 2x\right)' = 2x - 2$.

2) $y'' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Вторая производная — непрерывная функция.

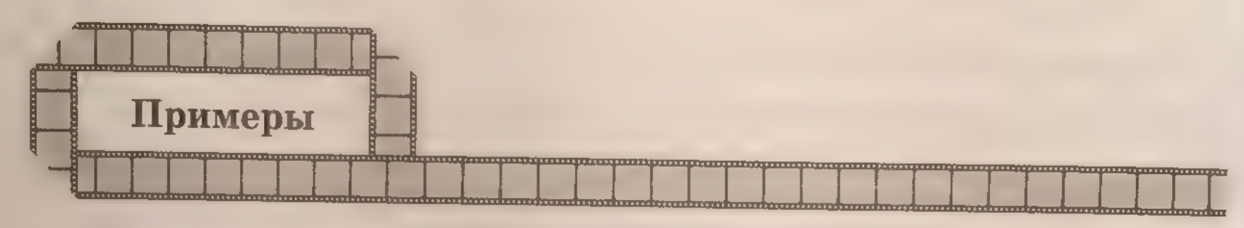
3) Исследуем знак $y''(x)$ на промежутках $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$.



4) $y''(x)$ поменяла знак при переходе через $x=1$, значит, $x=1$ — точка перегиба. Найдем $y(1)$:

$$y(1)=\frac{1}{3}(1-3)=-\frac{2}{3}$$

Ответ: $\left(1;-\frac{2}{3}\right)$ — точка перегиба графика функции.



1. ЭМ. Постройте график функции $f(x)=x-\frac{x^3}{3}$.

Решение.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$

2) Проверим четность, нечетность функции:

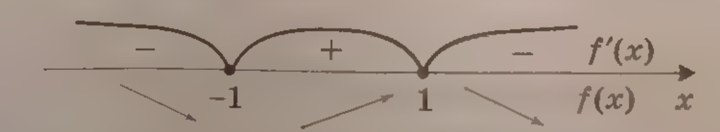
$$f(-x)=(-x)-\frac{(-x)^3}{3}=-x+\frac{x^3}{3}=-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)=-f(x),$$

следовательно, $y=f(x)$ — нечетная функция, ее график симметричен относительно точки O (0; 0).

3) Исследуем функцию на экстремумы:

$$f'(x)=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)'=1-x^2 \qquad \left(\frac{x^n}{c}\right)'=\frac{n}{c}x^{n-1}$$

$f'(x)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x_1=-1;\ \ x_2=1$



$$\begin{cases} x_{\min}=-1 \\ y_{\min}=f(-1)=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\Rightarrow\left(-1;-\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$ — точка, в которой минимум

$$\begin{cases} x_{\max} = 1 \\ y_{\max} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(1; \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$ — точка, в которой максимум

4) Найдем точки пересечения с осями координат:

$x = 0 \Rightarrow y(0) = 0 - \frac{0}{3} = 0;$ $O\ (0;\ 0)$ — точка пересечения с осью Oy

$y = 0 \Rightarrow x - \frac{x^3}{3} = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0 \Rightarrow x(3 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = \sqrt{3}$

$(-\sqrt{3};\ 0)$, $(0;\ 0)$ и $(\sqrt{3};\ 0)$ — точки пересечения с осью Ox

5) Найдем дополнительную точку: $f(-2) = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$, точка $\left(-2;\ \frac{2}{3}\right)$

6) Найдем точки перегиба:

$f''(x) = \left(1 - x^2\right)' = -2x$

$f''(x) = 0, \quad -2x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

+ − $f'(x)$

0 $f(x)$ x

$f(0) = 0 \Rightarrow O(0;0)$ — точка перегиба графика функции

Если $f''(x) > 0$, то график вогнутый ($\cup$); если $f''(x) < 0$, то график выпуклый ($\cap$)

$f''(x)$ поменяла знак, значит,

$x_0 = 0$ — точка перегиба

7) Построим систему координат xOy и все основные точки, учитывая, что график симметричен относительно $O(0;0)$ (рис. 75).

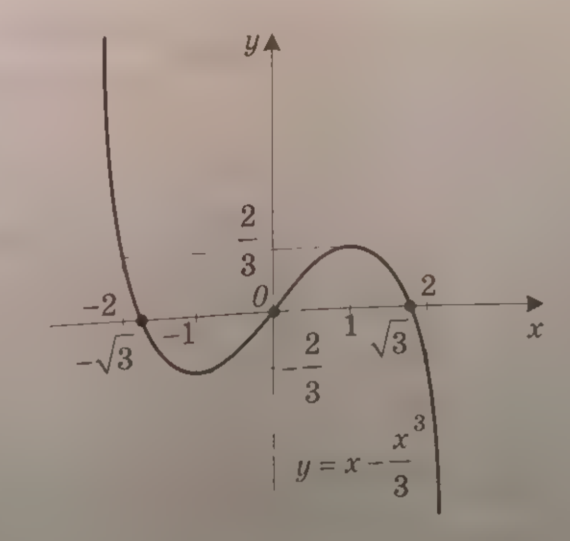


Рис. 75

2. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Решение.

1) $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

Через точку $x_k=2$ (точку разрыва функции) проведем вертикальную асимптоту.

Дробь $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл при $b\neq 0$

$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

2) Проверим четность, нечетность функции:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{-x-2}=\frac{x^2}{-(x+2)}=-\frac{x^2}{x+2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной: $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. График не симметричен ни относительно точки O (0; 0), ни относительно оси Oy.

3) Исследуем функцию на экстремумы:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'(x-2)-(x-2)'x^2}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-4)=0\\(x-2)^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.\\x\neq 2\end{cases}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$\frac{a}{b}=0,\text{ если }\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_{\max}=0\\y_{\max}=f(0)=\dfrac{0}{0-2}=0\end{cases}$$

O (0; 0) — точка, в которой $y_{\max}$

$$\begin{cases}x_{\min}=4\\y_{\min}=f(4)=\dfrac{16}{4-2}=8\end{cases}$$

(4; 8) — точка, в которой $y_{\min}$

4) Точки пересечения с осями:

с осью Ox: $y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-2}=0 \Rightarrow x=0$; точка $O(0;0)$

с осью Oy: $x=0 \Rightarrow y=0$, тоже точка $O(0;0)$

5) Дополнительные точки:

x	-8	-1	1	3	10
y	$-6{,}4$	$-\frac{1}{3}$	-1	9	$12{,}5$

6) Построим в системе координат xOy точки экстремума и дополнительные точки (рис. 76).

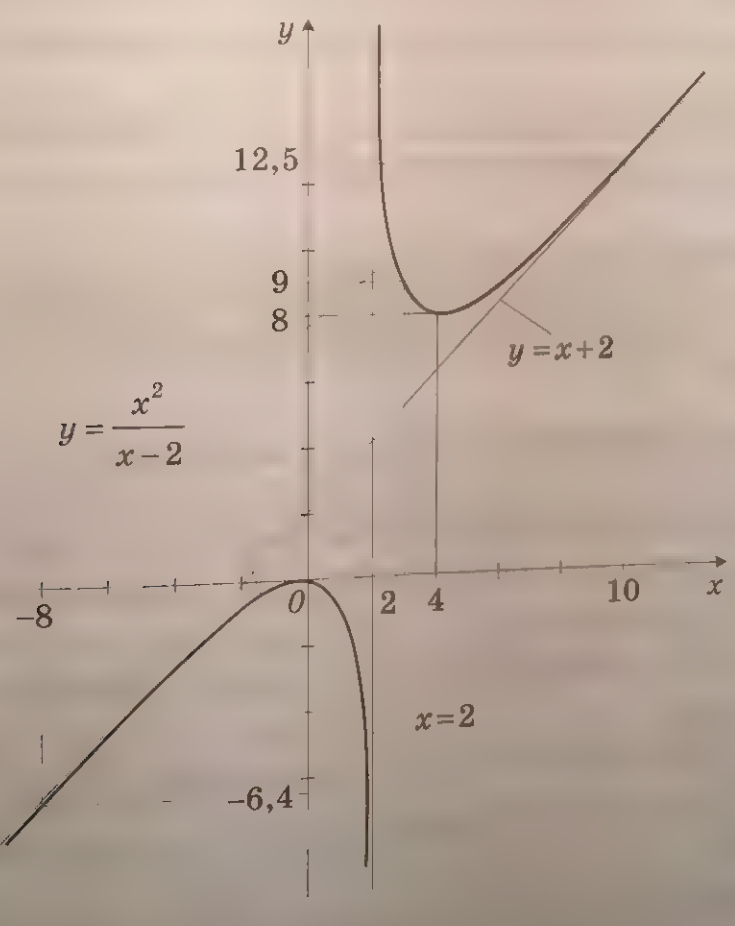
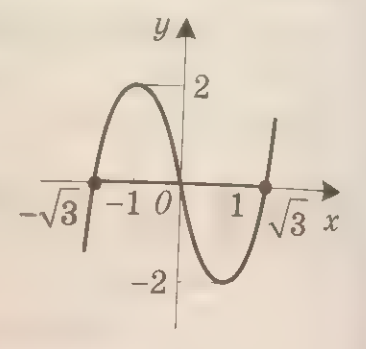


Рис. 76

Замечание. Построение наклонных асимптот см. на с. 492.



Проверь себя!



Постройте график функции $y = x^3 - 3x$. Найдите точки перегиба.

Ответ: рис. 77; O (0; 0) — точка перегиба.

Рис. 77

Нахождение асимптот графика функции $y = f(x)$

Определение. *Асимптотой* графика функции f называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции, никогда ее не пересекая.

Асимптоты бывают вертикальные ($x = x_0$), горизонтальные ($y = y_0$) и наклонные ($y = kx + b$).

Алгоритм 38 **Нахождение асимптот графика алгебраической функции f**

I. Нахождение вертикальной асимптоты ($x = x_0$)

График имеет вертикальную асимптоту $x = x_0$ в случае, если функция задана формулой, содержащей дробь, знаменатель которой обращается в нуль в точке x_0.

① Приравняйте знаменатель дроби к нулю и, решив уравнение, получите $x = x_0$.

② Проверьте, равен ли нулю числитель дроби при $x = x_0$: если числитель дроби не равен нулю при $x = x_0$, то $x = x_0$ — вертикальная асимптота.

Например: найдем вертикальную асимптоту к графику функции $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

1) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$;

2) $x^2 \neq 0$ при $x = 2$, значит, $x = 2$ — вертикальная асимптота (см. рис. 76) (по мере приближения x к значению $x_0 = 2$ точки графика приближаются к прямой $x = 2$).

Замечание. Если функция задана формулой, содержащей дробь, знаменатель которой не имеет нулей, то у графика функции f нет вертикальных асимптот.

Графики функций вида $y = \dfrac{k}{x^n}$ имеют асимптотой ось Oy.

II. Нахождение горизонтальной асимптоты ($y = y_0$)

Найдите предел функции при $|x| \to \infty$.

Если $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = y_0$, то $y = y_0$ — горизонтальная асимптота; если $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \pm\infty$, то нет горизонтальной асимптоты.

Например: найдем горизонтальные асимптоты к графику функций:

а) $y = \dfrac{5x-3}{3x+2}$; б) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; в) $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

а) $$\lim_{|x|\to\infty} \frac{5x-3}{3x+2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{5x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} 5 - \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{3}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2}{x}} = \frac{5}{3}$$

$y = \dfrac{5}{3}$ — горизонтальная асимптота

б) $$\lim_{|x|\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x} = 0,\ x \neq 0$$

$y = 0$ — горизонтальная асимптота (ось Ox)

в) $$\lim_{|x\to\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty,$$ значит, нет горизонтальной асимптоты

III. Нахождение наклонной асимптоты ($y=kx+b$)

① Найдите $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

② Найдите $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

Если предел найти нельзя (например, получите $\pm\infty$), то наклонной асимптоты нет.

③ Подставьте значения k и b в уравнение прямой $y=kx+b$, получите уравнение наклонной асимптоты.

Например: найдем уравнение наклонной асимптоты для функции $y=\frac{x^2}{x-2}$ (см. рис. 76).

1) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=1$

2) $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}}=2$

$y=kx+b\Rightarrow y=x+2$ — наклонная асимптота

Построение графика функции f по заданным $D(f)$ и $E(f)$



ЭМ. Изобразите график функции $y=f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3;3]$;

б) область значений функции составляет промежуток $[-3;4]$;

в) $f'(x)<0$ для любого x из интервала $(-3;\ 0)$;

$f'(x)>0$ для любого x из интервалов $(0;\ 2)$ и $(2;\ 3)$;

$f'(x)=0$ при $x=2$;

г) нули функции $x=-1$ и $x=2$.

Решение.

1) Построим систему координат xOy.

2) Проведем прямые $x=-3$ и $x=3$, $y=-3$ и $y=4$. Получим границы, в которых будет находиться график.

3) Если $f'(x)<0$ для любого $x\in(-3;\ 0)$, то функция убывает на промежутке $[-3;0]$, график направлен вниз-вправо.

4) Если $x=-1$ — нуль функции, то график пересечет ось Ox в точке $(-1;\ 0)$.

Для всех x из промежутка $[-3;0]$ должны существовать значения y (y может принимать любое значение из промежутка $[-3;4]$).

5) Если $f'(x)>0$ для всех x из интервалов $(0;\ 2)$ и $(2;\ 3)$, то функция непрерывная и возрастает на промежутке $[0;3]$ (график направлен вверх-вправо).

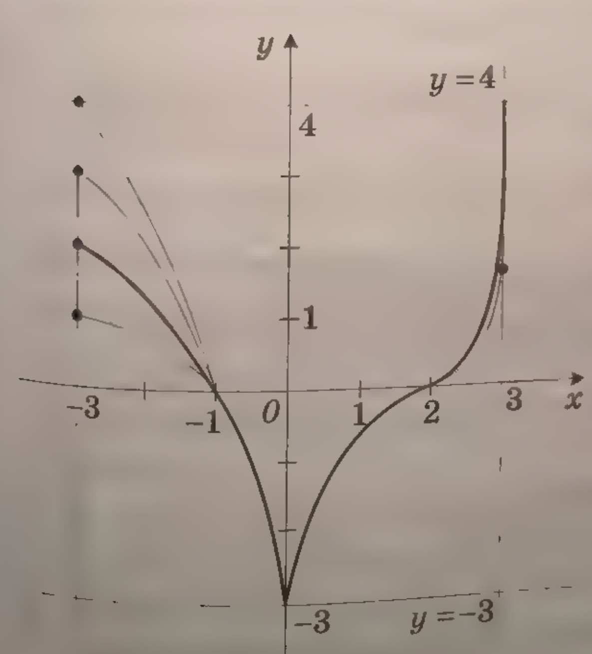


Рис. 78

6) $f'(2)=0$ при $x=2$, но так как производная не меняет знака при переходе через точку $x=2$, то $x=2$ — точка перегиба.

7) $x=0$ — точка «острого» минимума, так как функция непрерывна, производная поменяла знак при переходе через точку $x=0$, но в самой точке $f'(0)$ не существует, а $y=-3$ (см. $E(f)$).

Построенный график (рис. 78) соответствует заданным условиям, но он не однозначен в области определения.

Определение свойств функции по графику



ЭМ. Функция задана своим графиком (рис. 79). Укажите по графику:

а) область определения $y=f(x)$;

б) при каких значениях x $f(x)\le -1$;

в) при каких значениях x $f'(x)=0$;

г) промежутки возрастания и убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения $y=f(x)$.

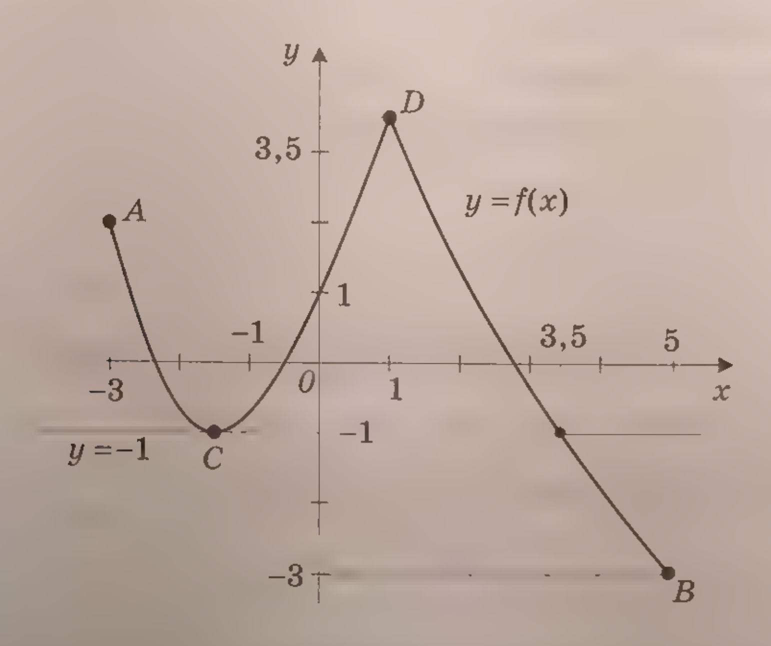


Рис. 79

<u>Решение.</u>

а) Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось Ox и запишем промежуток $[-3;5]$, который является областью определения.

б) Найдем значения x, при которых $f(x) \le -1$; для этого проведем прямую $y = -1$ и из точек пересечения графика и прямой опустим перпендикуляры на ось Ox.

Запишем значения x, при которых график $y = f(x)$ проходит ниже прямой $y = -1$, это отрезок $[3,5;5]$ и значение $x_0 = -1,5$, при котором $y = -1$ (прямая касается графика).

в) $f'(x) = 0$ в точке минимума: $x_{\min} = -1,5$, а в точке $x = 1$ (в точке «острого» максимума) $f'(1)$ не существует.

г) $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[-1,5;1]$ (график направлен вверх-вправо);

$y = f(x)$ убывает на промежутках $[-3;-1,5]$ и $[1;5]$ (график направлен вниз-вправо).

д) $f(1) = 3,5$ — наибольшее значение функции;

$f(5) = -3$ — наименьшее значение функции (опустите перпендикуляры на ось Oy из точек B и D).

Ответ: а) $D(f) = [-3;5]$; б) $f(x) \le -1$ при $x = -1,5$ и $x \in [3,5;5]$; в) $f'(x) = 0$ при $x = -1,5$; г) $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[-1,5;1]$ и $y = f(x)$ убывает на промежутках $[-3;-1,5]$ и $[1;5]$; д) $f(1) = 3,5$ — наибольшее, $f(5) = -3$ — наименьшее значения функции.

Алгоритм 39 **Решение задач на нахождение наибольшего или наименьшего значений величин**

Запишите «Дано» и «Найти». Сделайте чертеж, если задача геометрическая.

① Напишите формулу (I) для вычисления той величины, которая по условию должна быть наименьшей или наибольшей.

② Напишите формулу (II) известной величины через величины, входящие в (I) формулу, и выразите из нее все величины через одну неизвестную.

(3) Подставьте полученные в п. 2 величины в первую формулу.
(4) Обозначьте искомую величину через x и напишите для нее множество значений, которые она может принимать (по условию задачи).
(5) Запишите формулу из п. 3 как функцию от x.
(6) Исследуйте полученную функцию на наибольшее или наименьшее значение, учитывая п. 4.
(7) Найдите нужную по условию задачи величину.
(8) Запишите ответ.

Замечание. Если $x \in [a; b]$, то вычислите $f(a)$, $f(b)$ и $f(x_0)$, где $x_0 \in [a; b]$ — стационарные точки, сравните эти значения функции и выберите из них наибольшее или наименьшее.



Пример 1

Какой должна быть высота конуса с образующей $L = 20$ дм, чтобы его объем был наибольшим?

Дано:
Конус (рис. 80)
$L = 20$ дм — образующая
V — наибольший
Найти: H

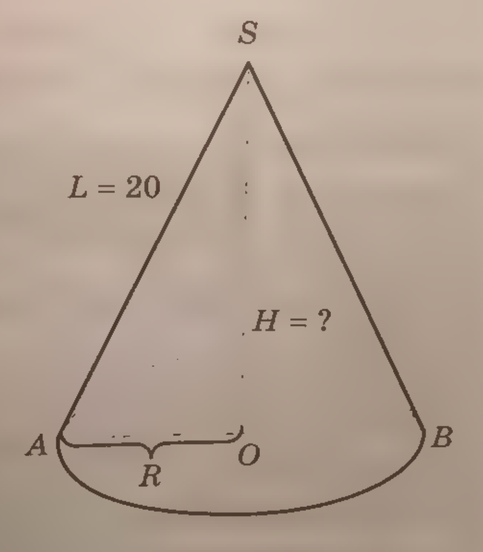


Рис. 80

Решение.

1) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$ (I)

2) $R^2 = L^2 - H^2 = 400 - H^2$ (II) (по следствию из теоремы Пифагора)

3) $V = \frac{1}{3}\pi H(400 - H^2)$

4) Пусть $H = x,\ x \in (0;20)$

5) $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi x(400 - x^2) = \dfrac{1}{3}\pi(400x - x^3)$

6) Исследуем $V(x)$ на наибольшее значение:

$V'(x) = \dfrac{1}{3}\pi(400 - 3x^2) = 0$

$V'(x) = 0, \quad 400 - 3x^2 = 0$

$x_1 = \dfrac{20}{\sqrt{3}};\ x_2 = -\dfrac{20}{\sqrt{3}}$

$x_1 \in (0;\ 20)$

$\left(\dfrac{1}{3}\pi(400x - x^3)\right)' = \dfrac{1}{3}\pi(400 - 3x^2)$

$V'(10) = \dfrac{1}{3}\pi(400 - 300) > 0$

7) $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ — точка максимума, единственная точка экстремума на промежутке (0; 20), значит, при $H = \dfrac{20}{\sqrt{3}} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ объем $V\left(\dfrac{20}{\sqrt{3}}\right)$ — наибольший

Ответ: объем конуса наибольший при $H = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ дм.

З а м е ч а н и е. Если бы взяли $x \in [0;20]$, то нашли бы $V(0) = 0$; $V(20) = 0$ и $V\left(\dfrac{20}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{20}{\sqrt{3}}\left(400 - \dfrac{400}{3}\right)$ — наибольший.



Пример 2

Цилиндрическая бочка для горючего вмещает 400π л бензина. При каких линейных размерах бочки на ее изготовление будет затрачено наименьшее количество материала?

Дано:
Цилиндр (рис. 81)
$V = 400\pi$ л $= 400\pi$ дм^3
$S_п$ — наименьшая
Найти: R, H

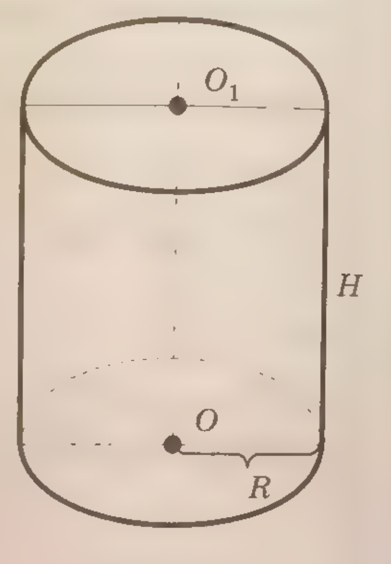


Рис. 81

Решение.

1) $S_п = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

2) $V = \pi R^2 H$

$400\pi = \pi R^2 H \Rightarrow H = \dfrac{400\pi}{\pi R^2} = \dfrac{400}{R^2}$

3) $S = 2\pi R^2 + \dfrac{2\pi R \cdot 400}{R^2} = 2\pi R^2 + \dfrac{800\pi}{R}$

4) Пусть $R = x$, $x \in (0; +\infty)$

5) $S(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{800\pi}{x}$

6) Исследуем $S(x)$ на наименьшее значение:

$S'(x) = \left(2\pi x^2 + \dfrac{800\pi}{x}\right)' = 4\pi x - \dfrac{800\pi}{x^2}$

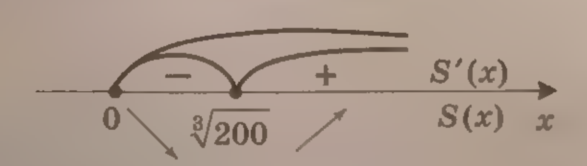
$S'(x) = 0 \Rightarrow 4\pi x - \dfrac{800\pi}{x^2} = 0$

$4\pi x^3 = 800\pi \,|\, : 4\pi \Rightarrow x^3 = 200 \Rightarrow x = \sqrt[3]{200}$

$(kx^n)' = knx^{n-1}$

$\left(\dfrac{c}{x}\right)' = -\dfrac{c}{x^2}$

$S'(1) = 4\pi - 800\pi < 0$



$S'(x)$ изменяет знак с «−» на «+» при переходе через точку $x_0 = \sqrt[3]{200}$, значит, x_0 — точка минимума. Экстремум на промежутке $(0; +\infty)$ единственный, значит, в точке x_0 функция принимает наименьшее значение.

7) $R=\sqrt[3]{200}$ (дм); $H=\dfrac{400}{R^2}=\dfrac{400}{\sqrt[3]{200^2}}=\dfrac{400\sqrt[3]{200}}{200}=2\sqrt[3]{200}$ (дм)

Ответ: $S_п$ принимает наименьшее значение при $R=\sqrt[3]{200}$ дм и $H=2\sqrt[3]{200}$ дм.



ЭМ. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, у которых одна из боковых граней является квадратом, а периметр нижнего основания равен 12 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

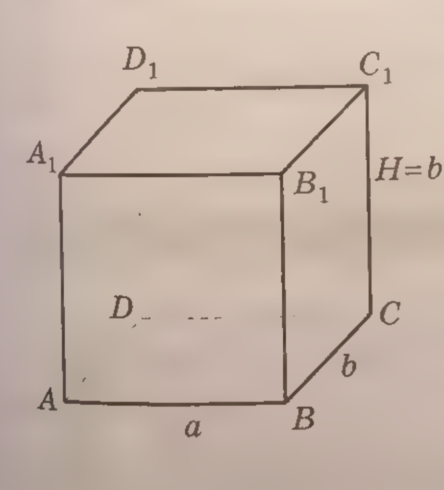


Рис. 82

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 82)

BCC_1B_1 — квадрат

$P_{ABCD}=12$ см

V — наибольший

Найти: $V_{наибольший}$

Решение.

1) $V=S_{осн}\cdot H=a\cdot b\cdot b=ab^2$ (по условию BCC_1B_1 — квадрат, поэтому $BC=CC_1=b$)

2) $P_{ABCD}=2a+2b=12\Rightarrow 2(a+b)=12\,\big|:2\Rightarrow a+b=6$ переменная $a=6-b$ (удобнее выразить a, потому что в формуле $V=ab^2$ переменная a стоит в 1-й степени)

3) $V=(6-b)b^2=6b^2-b^3$

4) Пусть $b=x$, $x\in[0;6]$, так как периметр основания равен 12

5) $V(x) = 6x^2 - x^3$

6) Исследуем функцию $V(x)$ на наибольшее значение:

$$V'(x) = \left(6x^2 - x^3\right)' = 12x - 3x^2$$

$$V'(x) = 0,\ 12x - 3x^2 = 0 \,\Big|\, :3 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0;\ 0 \in [0;\ 6] \\ x = 4;\ 4 \in [0;\ 6] \end{array}\right.$$

7) Вычислим $V(0)$; $V(4)$; $V(6)$:

$V(0) = 6 \cdot 0^2 - 0^3 = 0$

$V(4) = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 96 - 64 = 32$ — наибольшее

$V(6) = 6 \cdot 6^2 - 6^3 = 0$

Ответ: $V = 32$ см^3 — наибольший объем.



ЭМ. Основание треугольной пирамиды $PABC$ правильный треугольник ABC, боковое ребро PA перпендикулярно плоскости ABC, $PB = 3$. Найдите наибольший возможный объем такой пирамиды.

Дано:

$PABC$ — пирамида (рис. 83)

$PA \perp (ABC)$, $PB = 3$

$\triangle ABC$ — правильный

V — наибольший

Найти: $V_{\text{наибольший}}$

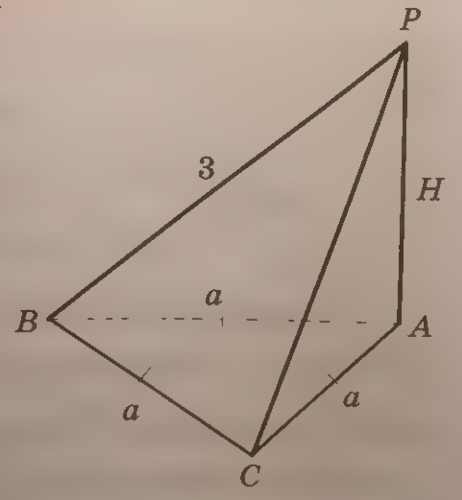


Рис. 83

Решение.

1) $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3} \cdot H$ | $S_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2) $a^2 + H^2 = 3^2$ (из прямоугольного треугольника PAB по теореме Пифагора)

$a^2 = 9 - H^2$ (удобнее найти a^2)

3) $V = \frac{1}{12}\sqrt{3} \cdot (9 - H^2) \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{12}(9H - H^3)$

4) Пусть $H = x$, $x \in (0;3)$ (катет (H) всегда меньше гипотенузы PB)

5) $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{12}(9x - x^3)$

6) Исследуем функцию $V(x)$ на наибольшее значение:

а) $V'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}(9x - x^3)\right)' =$

$= \frac{\sqrt{3}}{12}((9x)' - (x^3)') = \frac{\sqrt{3}}{12}(9 - 3x^2) =$

$= \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{12}(3 - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3 - x^2)$

$(k \cdot f(x))' = kf'(x)$

$(k \cdot x)' = k$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

б) $V'(x) = 0$; $\frac{\sqrt{3}}{4}(3 - x^2) = 0$

$3 - x^2 = 0$, $x_1 = \sqrt{3}$; $\sqrt{3} \in (0;3)$

$x_2 = -\sqrt{3} \notin (0;3)$

$3 - x^2 = 0$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

Найдите знак $V'(x)$, пусть

$x = 1$; $1 \in (0;\sqrt{3})$

в)

$\sqrt{3}$ — точка $\max V(x)$

Максимум единственный на промежутке (0; 3), значит, при $x_0 = \sqrt{3}$ функция $V(x)$ имеет наибольшее значение.

$$V(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(9\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3}{2} \text{ (куб. ед.)}$$

$$V'(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3-1) > 0$$

$$V'(x) < 0; \quad x_0 \in \left(\sqrt{3}; 3\right)$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $V_{\text{наибольший}} = \frac{3}{2}$ куб. ед.

Попробуй не реши!

1. Периметр осевого сечения цилиндра 6 дм. При каком радиусе основания цилиндра его объем наибольший?

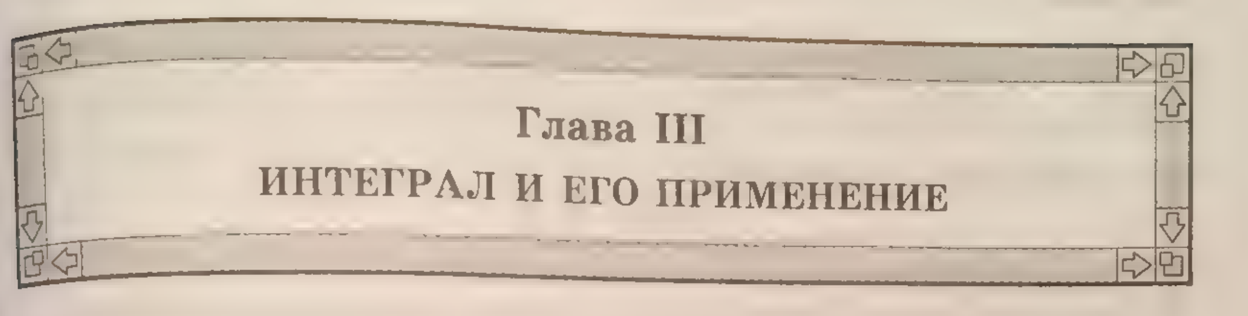
2. В правильной четырехугольной призме диагональ призмы равна $2\sqrt{3}$. При какой высоте призмы ее объем наибольший?

Ответ: **1.** 1 дм. **2.** $H = 2$.

Попробуй-ка реши!

Какую наименьшую общую площадь поверхности имеет цилиндр, если его объем равен V?

Ответ: $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.



Глава III
ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1 Первообразная

Действие нахождения функции по ее заданной производной называется *интегрированием*.

Рассмотрим две задачи, приводящие к двум взаимно обратным операциям.

***Задача* I.**
Дано:
$F(x)$ — непрерывная дифференцируемая функция
Найти:
$f(x)=F'(x)$

***Задача* II.**
Дано:
$f(x)=F'(x)$
Найти:
$F(x)$

Решение задачи I — нахождение $f(x)$ — производной данной функции $F(x)$, эта операция называется *дифференцированием*.

Решение задачи II — нахождение функции $F(x)$ по ее заданной производной $f(x)$, эта операция называется *интегрированием*.

З а м е ч а н и е. Напомним, что название действия дифференцирования происходит от слова «дифференциал». Дифференциал — это главная часть приращения функции и обозначается dy; $dy=y'\cdot dx$ $(dy\approx\Delta y,\ dx=\Delta x)$, отсюда $y'=\dfrac{dy}{dx}$ — определение производной через дифференциал.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

(функция $f(x)$ является производной от $F(x)$).

Если функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Определение 2. Первообразная $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x)dx = F'(x)dx = dF$ — дифференциал функции F;

$$\overbrace{\int}^{\text{знак действия интегрирования}} \underbrace{f(x)dx}_{\text{подинтегральное выражение}} = \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{первообразная для функции } f(x)} + \overbrace{C}^{\text{постоянная}}}_{\text{неопределенный интеграл}}$$

Свойства первообразных

1. Если $F'(x) = 0$, то $F(x)$ — постоянная величина.

2. Если $F(x)$ и $P(x)$ — первообразные для $f(x)$ и $p(x)$, то $F(x) + P(x)$ есть первообразная для $f(x) + p(x)$:

$$\int (f(x) + p(x))dx = \int f(x)dx + \int p(x)dx = F(x) + P(x) + C$$

(интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций).

3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$, где k — постоянная:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$$

(постоянный множитель можно вынести за знак интеграла).

4. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$, где $k \neq 0$, b — постоянная:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

Замечание. Функция $f(x)$ рассматривается на интервале, где она определена и непрерывна.

Геометрический смысл неопределенного интеграла

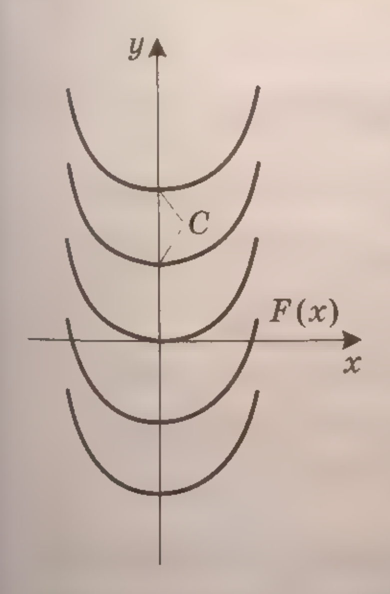


Рис. 84

Геометрически $F(x)+C$ — это множество графиков, полученных сдвигом графика $y=F(x)$ на C единиц вдоль оси Oy (рис. 84). Все графики будут иметь при заданном значении x_k касательные, параллельные между собой, с одним и тем же угловым коэффициентом $k=f'(x_k)$.

Неопределенность выражения $F(x)+C$ связана с наличием произвольной постоянной C. Неопределенность можно устранить, если задать точку $(x_k;\ y_k)$, через которую проходит график.

Алгоритм 40 **Нахождение первообразной функции $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $(x_0;\ y_0)$**

① Найдите множество всех первообразных $y = F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ (по таблице на с. 555–557).

② Подставьте в равенство $y = F(x) + C$ вместо x и y координаты x_0 и y_0 из условия задачи и решите уравнение $y_0 = F(x_0) + C$ относительно C.

③ Подставьте значение C в формулу множества первообразных, найденную в пункте 1: получите формулу первообразной, график которой проходит через заданную точку.

④ Запишите ответ.



1. ЭМ. Найдите первообразную функции $f(x)=3x-5$, график которой проходит через точку (4; 10).

Решение.

1) $y=\int(3x-5)dx=\int 3xdx-\int 5dx=\dfrac{3x^2}{2}-5x+C$

2) $x_0=4$, $y_0=10$

$10=\dfrac{3\cdot 16}{2}-5\cdot 4+C$, $C=6$

3) $y=\dfrac{3x^2}{2}-5x+6$

$y=F(x)+C$

$\int(f(x)+p(x))dx=$

$=\int f(x)dx+\int p(x)dx$

$\int kxdx=\dfrac{kx^2}{2}+C$

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

Ответ: $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}-5x+6$.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем формулу $\int(f(x)+g(x))dx=$ $=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ можно применять устно и сразу записывать сумму первообразных функций.

2. ЭМ. Дана функция $f(x)=x\sqrt{x^2-4x+4}$. Для функции $y=f(x)$ на луче $(-\infty;2)$ найдите первообразную $y=F(x)+C$, график которой проходит через точку (0; 5).

Решение.

1) $D(f)=(-\infty;\ 2)$ по условию

Предварительно упростим выражение $x\sqrt{x^2-4x+4}$:

$x\sqrt{x^2-4x+4}=x\sqrt{(x-2)^2}=x|x-2|=$

$=x(2-x)=2x-x^2$

Найдем множество всех первообразных:

$$y=\int\left(2x-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C=x^2-\frac{x^3}{3}+C$$

2) Подставим $x_0=0$ и $y_0=5$ в формулу $y=F(x)+C$ и найдем C:

$$\frac{2\cdot 0^2}{2}-\frac{0^3}{3}+C=5;\ C=5$$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$\sqrt{a^2}=|a|$

$x<2\ (D(f))$

$|a|=-a$, если $a<0$

$\int kxdx=\frac{kx^2}{2}+C$

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

$\underbrace{F(0)}_{5}=x^2-\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{0}+C$

3) Получим первообразную, график которой проходит через точку (0; 5):

$$y=x^2-\frac{x^3}{3}+5$$

Ответ: $y=x^2-\frac{x^3}{3}+5.$

3. ЭМ. Даны функции

$$F(x)=-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)^2 \text{ и } f(x)=-x^3+3x^2-2x$$

Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Решение.

$F'(x)=\left(-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)^2\right)'=$

$=\left(-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right)'=-x^3+3x^2-2x$

$F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$

$F'(x)=-x^3+3x^2-2x=f(x)$; $F(x)$ — первообразная для $f(x)$

Ответ: $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

4. ЭМ. Найдите все первообразные функции $f(x)=4x-x^2$.

Решение.

Найдем $F(x)+C$:

$y=\int(4x-x^2)dx=\int 4xdx-\int x^2dx=$

$=\frac{4x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C=2x^2-\frac{x^3}{3}+C$

$F(x)+C=\int f(x)dx$

$\int kx^n dx=\frac{kx^{n+1}}{n+1}+C$

Ответ: $F(x)=2x^2-\frac{x^3}{3}+C$ — все первообразные функции $f(x)$.

5. ЭМ. Найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x)=2x^3+x^2+3$, которая принимает положительные значения при $x=-1$.

Решение.

1) Найдем множество всех первообразных:

$\int(2x^3+x^2+3)dx=$

$=\frac{2x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3x+C=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+3x+C$

$F(x)+C=\int f(x)dx$

$\int kx^n dx=\frac{kx^{n+1}}{n+1}+C$

$\int kdx=kx+C$

2) Если $F(-1)>0$, то это значит, что

$$\frac{(-1)^4}{2}+\frac{(-1)^3}{3}+3(-1)+C>0\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-3+C>0;\ C-2\frac{5}{6}>0;\ C>2\frac{5}{6}$$

3) Любое число $C>2\frac{5}{6}$ будет удовлетворять требованию задачи, *например* $C=4$, тогда $F(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+3x+4$ – одна из первообразных

Ответ: $F(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+3x+4$.

6. ЕГЭ. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=e^x+4x^3$, если известно, что $F(0)=-1$.

Решение.

1) Множество всех первообразных:

$$\int(e^x+4x^3)dx=e^x+x^4+C$$

2) $F(0)=-1 \Rightarrow x_0=0;\ y=-1$

$-1=e^0+0^4+C;\ -1=1+C;\ C=-2$

3) $F(x)=e^x+x^4-2$ – искомая

Ответ: $F(x)=e^x+x^4-2$.

Функция $f(x)$ — непрерывная

$\int kx^n dx=\frac{kx^{n+1}}{n+1}+C$

$\int e^x dx=e^x+C$

$e^0=1$

Проверь себя!

Дана функция $f(x)=9-3x^2$. Найдите для функции $y=f(x)$ первообразную, график которой проходит через точку O (0; 0).

Ответ: $F(x)=9x-x^3$.

§ 2 Интеграл

Определение. *Определенным интегралом непрерывной функции* $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число $F(b)-F(a)$, или приращение первообразной функции $F(x)$, где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Обозначение определенного интеграла

$$\underbrace{\int_a^b}_{} f(x)dx=\underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{определенный интеграл}}$$

верхний предел — b; нижний предел — a

Читается: «Интеграл от а до б эф от икс дэ икс».

При вычислении определенных интегралов удобно применить следующее обозначение:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

Формула Ньютона — Лейбница

Формула $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, или $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ (взятая нами в качестве определения интеграла непрерывной функции на отрезке $[a;\ b]$) называется формулой Ньютона — Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла

$$S_{\text{крив. трап}}=\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

(это площадь криволинейной трапеции)

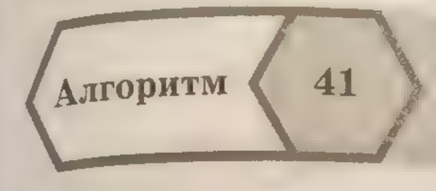
Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$

2. $\int\limits_a^c f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx$

3. $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$

4. $\int\limits_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b g(x)dx$



Вычисление интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$

① Упростите выражение $f(x)$, если это возможно, и примените одну из формул (1–4).

Например: $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

② Запишите за чертой формулу Ньютона — Лейбница:

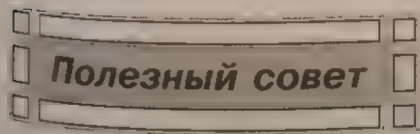
$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

③ Найдите первообразную $F(x)$ по таблице неопределенных интегралов (с. 555–557) и запишите

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

④ Вычислите значения $F(b)$ и $F(a)$ этой первообразной и найдите разность $F(b) - F(a)$, получите число, равное значению интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. (Действия выполняйте подряд, не разделяя на пункты, применяя их устно.)

⑤ Запишите ответ.



1. Вычисляя $F(b) - F(a)$, удобно выносить за скобку постоянный множитель.

2. При вычислении определенного интеграла число C в первообразной писать не надо, так как результат не зависит от C:

$$F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$



Вычислите интеграл (1–5).

1. $\int_{-2}^{-1}(5-4x)dx$

Решение.

1) $\int_{-2}^{-1}(5-4x)dx=\int_{-2}^{-1}5dx-4\int_{-2}^{-1}xdx$

$\int_a^b(f(x)-g(x))dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

2) $5x\Big|_{-2}^{-1}-2x^2\Big|_{-2}^{-1}$

$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

3) $5(-1-(-2))-2((-1)^2-(-2)^2)=$
$=5\cdot1-2\cdot(-3)=5+6=11$

Ответ: 11.

2. $\int_2^6\sqrt{2x-3}dx$

Решение.

Пункты алгоритма применим устно.

$\int_2^6\sqrt{2x-3}dx=\frac{2}{3\cdot2}\sqrt{(2x-3)^3}\Big|_2^6=$

$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{(2\cdot6-3)^3}-\sqrt{(4-3)^3}\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3}-1\right)=$

$=\frac{1}{3}\left(3^3-1\right)=\frac{1}{3}\cdot26=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$

ОДЗ: $x\ge\frac{3}{2}$

$[2;6]\subset\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

$\int\sqrt{kx+b}dx=\frac{2}{3k}\int\sqrt{(kx+b)^3}$

$k=2$

$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

Ответ: $8\frac{2}{3}$.

З а м е ч а н и е. Можно было учесть при нахождении интеграла, что $\int\sqrt{2x-3}dx=\int(2x-3)^{\frac{1}{2}}dx$.

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)dx$

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)dx = -3\cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -3\left(\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(0 - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= -3\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= -3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}\right) = -3\cos\frac{2\pi}{9} + \frac{3}{2}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b)$$

$$k = \frac{1}{3}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $-3\cos\frac{2\pi}{9} + \frac{3}{2}$.

4. $\int\limits_0^{\ln 2} e^x dx$

Решение.

$$\int\limits_0^{\ln 2} e^x dx = e^x\Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

$$e^{\ln b} = b$$

$$e^0 = 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Ответ: 1.

5. $-\int\limits_3^2 x^2 dx$

Решение.

$$-\int\limits_3^2 x^2 dx = \int\limits_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$$

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

Ответ: $6\frac{1}{3}$.

Полезный совет

Выражение вида $F(x)\Big|_a^b \pm P(x)\Big|_a^b$ можно вычислить так: $\big(F(b)\pm P(b)\big)-$ $-\big(F(a)\pm P(a)\big)$.

Проверь себя!

Вычислите интеграл.

1. $\int\limits_{-1}^{2} 2dx$. **2.** $\int\limits_{0}^{8} \sqrt[3]{x}dx$. **3.** $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$. **4.** $\int\limits_{0}^{3} 8\cos(4x-12)\,dx$.

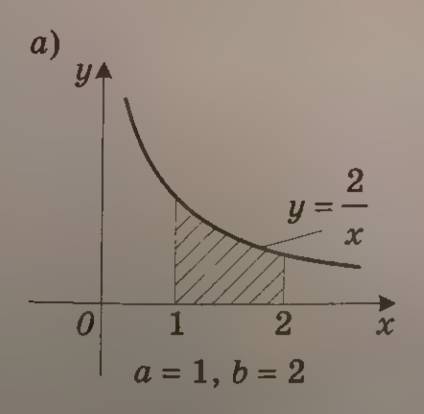
Ответ: **1.** 6. **2.** 12. **3.** $\frac{3}{8}$. **4.** $2\sin 12$.

§ 3 Криволинейная трапеция

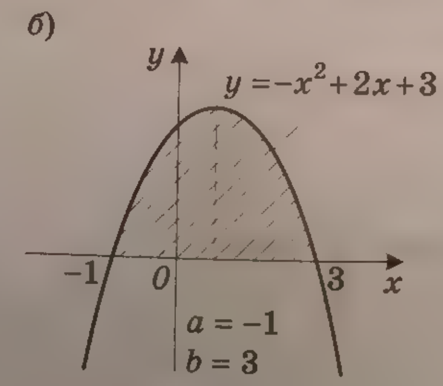
Определение. Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox, называется *криволинейной трапецией*, где $[a;b]$ — основание трапеции.

Примеры криволинейных трапеций приведены на рисунке 85.

а)



б)



в)

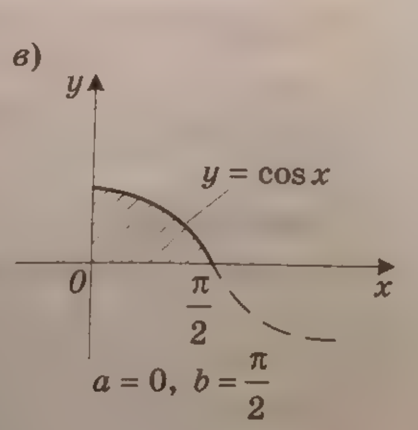


Рис. 85

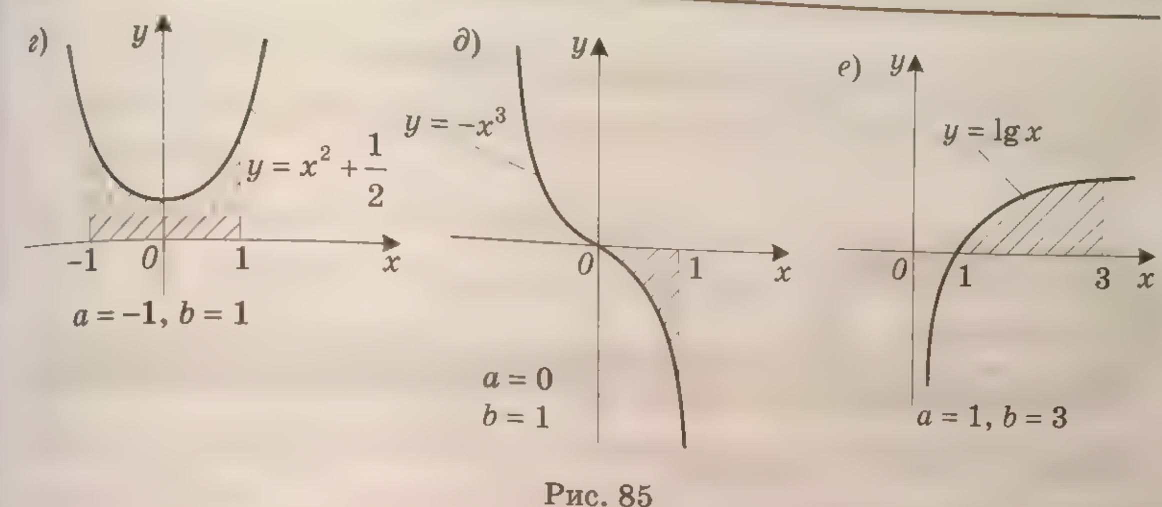


Рис. 85

Геометрический смысл определенного интеграла

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$ на $[a; b]$, прямыми $x = a$ и $y = b$, отрезком $[a; b]$ оси Ox; вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница:

$$S_{\text{фигуры}} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Алгоритм 42 **Вычисление площади криволинейной трапеции**

1. Постройте эскиз графика функций $y = f(x)$.
2. Выделите криволинейную трапецию, площадь которой надо найти.
3. Найдите пределы интегрирования a и b (если они явно не даны).
4. Запишите формулу Ньютона — Лейбница:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(5) Вычислите площадь криволинейной трапеции.
(6) Запишите ответ.



1. *Дано:* $y = x^3 + 2$ — функция.

Прямые $x = 0$ и $x = 2$.

Найти: площадь фигуры, ограниченной графиком функции, прямыми $x = 0$ и $x = 2$ и осью Ox.

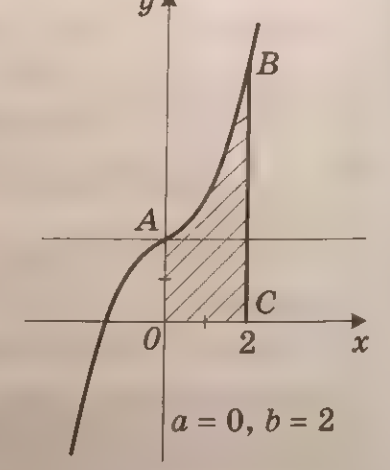
Решение.

1) Постройте эскиз графика функции $y = x^3 + 2$ (рис. 86):

а) $y = x^3$; б) опустим ось Ox на 2 единицы вниз.

2) Проведем прямую $x = 2$. Фигура $OABC$ — криволинейная трапеция.

3) $a = 0$; $b = 2$ (по условию)



4) $S_{\text{фигуры}} = \int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

5) $S = \int\limits_0^2 (x^3 + 2)dx = \frac{x^4}{4} + 2x\Big|_0^2 =$

$= F(2) - F(0) = 8 - 0 = 8$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int kdx = kx + C$

$F(2) = \frac{16}{4} + 2 \cdot 2 = 8$

Ответ: $S_{\text{фигуры}} = 8$ кв. ед.

2. *Дано:* $y=-x^2+3x+4$ — функция.

Найти: площадь фигуры, ограниченной графиком $y=f(x)$ и осью Ox.

Решение.

1) Построим эскиз графика функции $y=-x^2+3x+4$:

а) $a=-1$ — ветви параболы направлены вниз

б) нули функции:

$$-x^2+3x+4=0 \Rightarrow x^2-3x-4=0; \quad x_1=-1;\ x_2=4$$

2) Криволинейная трапеция ограничена параболой и осью Ox (рис. 87).

3) $a=-1$; $b=4$

4) $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$S_{\text{фигуры}}=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

5) $S=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+4x\Big|_{-1}^{4}=$

$$=-\frac{4^3}{3}+\frac{3\cdot 4^2}{2}+4\cdot 4-\left(-\frac{-1}{3}+\frac{3(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)\right)=$$

$$=18\frac{2}{3}-\left(-2\frac{1}{6}\right)=18\frac{4}{6}+2\frac{1}{6}=20\frac{5}{6}$$

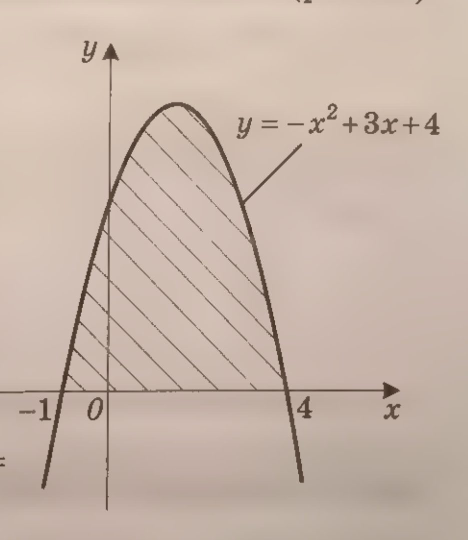


Рис. 87

Ответ: $S_{\text{фигуры}}=20\dfrac{5}{6}$ кв. ед.

Полезный совет

При вычислении площади фигуры имейте в виду, что:

1. Если фигура находится под осью Ox (рис. 88, *a*), то

$$S_{\text{фигуры}}=\left|\int_a^b f(x)dx\right|, \text{ или } S_{\text{фигуры}}=-F(x)\Big|_a^b.$$

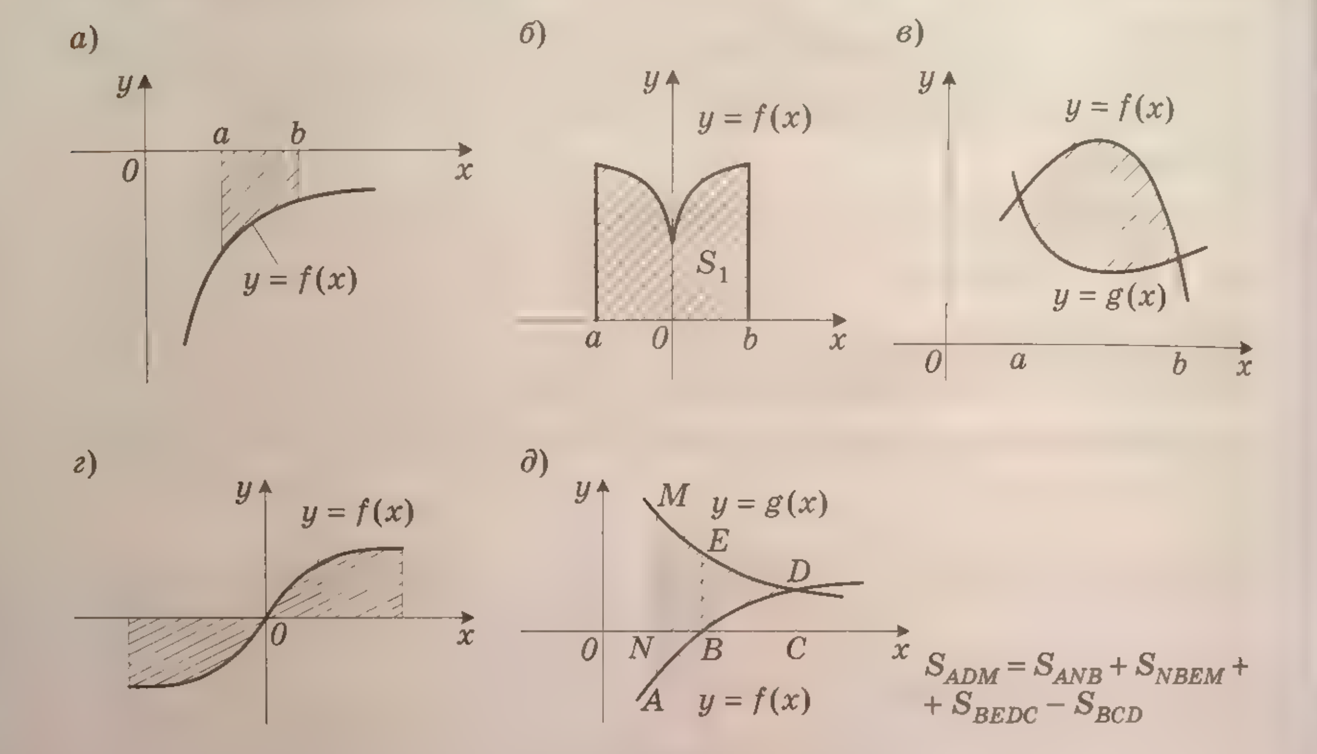


Рис. 88

2. Если фигура симметрична относительно оси Oy (рис. 88, *б*), то $S_{\text{фигуры}} = 2S_1$, где $S_1 = \int\limits_0^b f(x)dx$ (удобно вычислять значение $F(x)$ при $a = 0$).

3. Если фигура состоит из разности двух криволинейных трапеций (рис. 88, *в*), то

$$S_{\text{фигуры}} = \int\limits_a^b \bigl(f(x) - g(x)\bigr)dx,$$

где $f(x)$ — функция верхнего графика, а $g(x)$ — функция нижнего графика.

4. Если фигура состоит из нескольких частей и $f(x)$ принимает и положительные и отрицательные значения на $[a; b]$, то необходимо отрезок $[a; b]$ разбить на такие части, в каждой из которых функция не меняет свой знак, вычислить площади получившихся частей фигуры и сложить их (рис. 88, *г*, *д*).



Вычисление площади фигуры, состоящей из комбинации криволинейных трапеций

1. Постройте эскизы графиков функций по данным в условии задачи.
2. Выделите фигуру, площадь которой надо найти.
3. Составьте формулу вычисления площади фигуры через площади криволинейных трапеций (см. Полезный совет 4).
4. Запишите, чему равны пределы интегрирования a и b, если они даны. Если a и b не даны, то решите уравнение $f(x)=g(x)$ или $f(x)=0$.
5. Вычислите площадь каждой криволинейной трапеции (см. А-42).
6. Найдите искомую площадь по формуле (п. 3).
7. Запишите ответ.



1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y_1=x^2$ и $y_2=2x^2-1$.

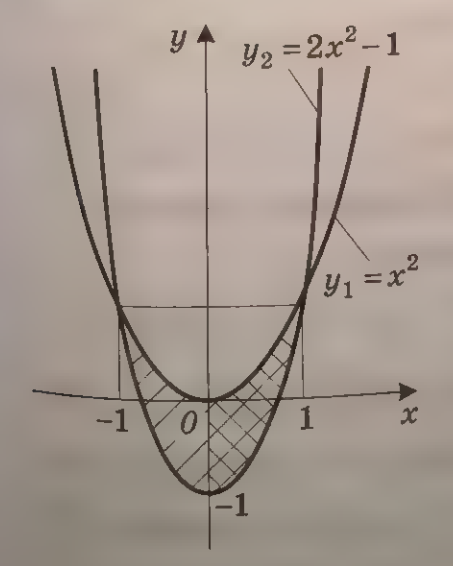


Рис. 89

Решение.

1) Построение графиков:

а) построим график функции $y_1=x^2$;

б) построим график функции $y_2=2x^2-1$ (рис. 89) с вершиной в точке (0; −1).

2) Фигура, площадь которой надо вычислить, на рисунке 89 заштрихована.

3) Фигура симметрична оси Oy, значит,

$S_{\text{фигуры}}=2S_1$, где $S_1=\int_0^b (y_1-y_2)\,dx$

(см. Полезный совет 2); фигура состоит из разности двух криволинейных трапеций, ограниченных графиками функций $y_1 = x^2$, $y_2 = 2x^2 - 1$ и осями Ox и Oy (см. Полезный совет 3).

4) Найдем предел интегрирования b ($a = 0$):

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1;\ x_1 = 1;\ x_2 = -1,$$

примем $b = 1$; $a = 0$ — пределы интегрирования.

5) $S_1 = \int\limits_0^1 \left((x^2 - (2x^2 - 1)\right)dx = \int\limits_0^1 (-x^2 + 1)dx =$

$= -\dfrac{x^3}{3} + x \Big|_0^1 = -\dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}$

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$\int dx = x + C$

6) $S_{\text{фигуры}} = 2S_1 = 2 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$

$S_{\text{фигуры}} = \int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b =$

$= F(b) - F(a)$

Ответ: $S_{\text{фигуры}} = \dfrac{4}{3}$ кв. ед.

Попробуй не реши!

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y = -\sqrt[3]{x}$; прямыми $x = -8$ и $x = -1$; осью Ox.
2. $y = x^2 + x - 6$ и осью Ox.

Ответ: 1. $S_{\text{фигуры}} = 11\dfrac{1}{4}$ кв. ед. 2. $S_{\text{фигуры}} = 20\dfrac{5}{6}$ кв. ед.

2. Найдите площадь фигуры, расположенной во II четверти и ограниченной графиком функции $y = x^3 - 3x$, осью Oy, касательной l к графику функции в точке $x_0 = -1$.

Решение.

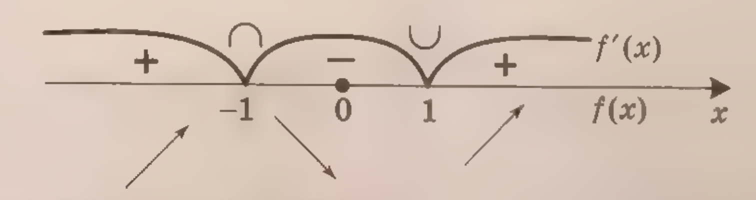
1) Построим эскиз графика функции $y = x^3 - 3x$:

а) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; функция $y = f(x)$ непрерывная, дифференцируемая и нечетная: $y(-x) = -x^3 + 3x = -y(x)$ (график симметричен относительно $O\ (0;\ 0)$)

б) исследуем функцию на экстремум:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x\right)' = \left(x^3\right)' - (3x)' = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = -1$$



$$\begin{matrix} x_{\max} = -1 \\ x_{\min} = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_{\max} = f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = 2;\ (-1;2) \cap \\ y_{\min} = f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = -2;\ (1;-2) \cup \end{matrix}$$

в) дополнительные точки:

$x = -2;\ f(-2) = -8 + 6 = -2,$ получим точку графика $(-2;2)$

$x = 2;\ f(2) = 8 - 6 = 2,$ получим точку графика $(2;2)$

г) нули функции: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{3};$ $x_3 = \sqrt{3}$

точки пересечения с осью Oy: $x = 0;\ y(0) = 0 \Rightarrow O(0;0)$

д) уравнение касательной к графику $y = x^3 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x\right)' = 3x^2 - 3,\ f'(x_0) = f'(-1) = 3 - 3 = 0$$

$$f(x_0) = f(-1) = 2$$

$$y = 0(x+1) + 2 \Rightarrow y = 2$$

$y = 2$ — уравнение касательной l

е) построим эскиз графика.

2) Проведем $AC \perp Ox$ (рис. 90): CAO — криволинейная трапеция, ограниченная графиком $y = x^3 - 3x$, прямой $x = -1$ и отрезком $[-1;0]$ оси Ox; OAD — искомая фигура

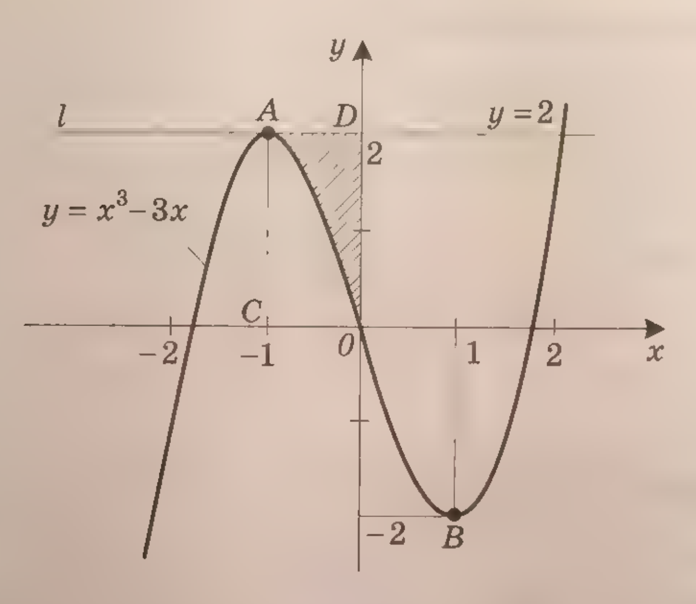


Рис. 90

3) $S_{OAD} = S_{CADO} - S_{CAO}$

4) $a = x_{\max} = -1$; $b = 0$

5) $S_{CADO} = CO \cdot DO = 1 \cdot 2 = 2$ (кв. ед.)

$$S_{CAO} = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) = 0 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

6) $S_{OAD} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$

Ответ: $S_{OAD} = \frac{3}{4}$ кв. ед.

$$S_{\text{фигуры}} = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b =$$

$$= F(b) - F(a)$$

$CADO$ — прямоугольник

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}; \quad \int kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

Попробуй не реши!

1. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox:

а) $a = 2$; $b = 4$; $f(x) = x^3$

б) $a = -\frac{\pi}{6}$; $b = 0$; $f(x) = \cos x$

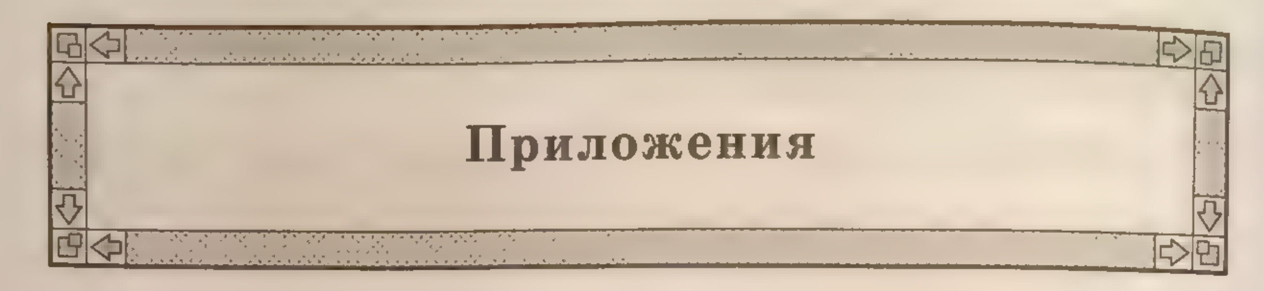
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x$.

Ответ: **1.** а) 60 кв. ед.; б) $\frac{1}{2}$ кв. ед. **2.** $\frac{1}{6}$ кв. ед.

Попробуй-ка реши!

Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, прямой $x = 1$ и касательной к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Ответ: $\ln 2 - \frac{5}{8}$ кв. ед.



Приложения

Приложение 1

ФОРМУЛЫ

Законы сложения и умножения

1. ***Переместительный закон***

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \cdot b = b \cdot a$$

2. ***Сочетательный закон***

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$
$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. ***Распределительный закон***

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Действия над числами

1. $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

2. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

4. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

5. $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b}$

6. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m}$

7. $a \pm 0 = a$

8. $a \cdot 0 = 0$

9. $a : 0$ — **нельзя!**

10. $a \cdot 1 = a$

11. $a : 1 = a$

12. $1 : a = \frac{1}{a}$

13. $a : b = \frac{a}{b}$

14. $A\frac{b}{c} = \frac{Ac + b}{c}$

Проценты

$$0{,}01 = 1\% ; \quad \frac{A}{100} \text{ — } 1\% \text{ числа } A$$

1. A — 100%
   x — $n\%$
   $$x = \frac{A \cdot n\%}{100\%} = A \cdot (0{,}01 \cdot n) \text{ — часть от числа}$$

2. x — 100%
   B — $n\%$
   $$x = \frac{B \cdot 100\%}{n\%} = B : (0{,}01 \cdot n) \text{ — число по части}$$

Пропорции

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \text{ — пропорция } (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0)$$

$$a \cdot d = b \cdot c \text{ — основное свойство пропорции}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow x = \frac{ad}{c} \qquad \frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow x = \frac{bc}{d}$$

Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

4. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

5. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Leftrightarrow (a^3 + b^3) + 3ab(a+b) = (a+b)^3$

7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Leftrightarrow (a^3 - b^3) - 3ab(a-b) = (a-b)^3$

8. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

9. $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a-b)(a+b)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$

10. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

Определение степеней

1. $\begin{cases} n \in N; \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \\ n = 1; \quad a^1 = a \end{cases}$

2. $n = 0; \quad a^0 = 1, \quad a \neq 0$

3. $\begin{cases} n = -1; \quad a^{-1} = \dfrac{1}{a}, \ a \neq 0; \ \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-1} = a; \ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a} \\ n = -m; \quad m \in N; \ a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \ a \neq 0; \ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m \end{cases}$

4. $n = \dfrac{k}{m}, \quad k \in N, \quad m \in N, \quad m \geq 2; \ a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k}, \ a \geq 0; \ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

5. $n = -\dfrac{k}{m}, \quad k \in N, \quad m \in N, \ m \geq 2; \ a^{-\frac{k}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a^k}}, \ a > 0$

6. $n = \alpha$ — иррациональное число

1) $a > 1; \quad a^{\bar{\alpha}} < a^{\alpha} < a^{\overset{+}{\alpha}}$

2) $0 < a < 1; \quad a^{\overset{+}{\alpha}} < a^{\alpha} < a^{\bar{\alpha}}$

$\overset{+}{\alpha}$ — рациональное приближение α с избытком

$\bar{\alpha}$ — рациональное приближение α с недостатком

Действия со степенями ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
7. $a^{m-n} = a^m : a^n$
8. $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$
9. $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$
10. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Определение арифметического корня

$\sqrt[n]{a} = b$ — корень, если $a \ge 0$, $b \ge 0$, $b^n = a$

$\sqrt{a} = b$ — корень, если $a \ge 0$, $b \ge 0$, $b^2 = a$

Действия с квадратными корнями

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \ge 0$; $b \ge 0$

2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \ge 0$; $b > 0$

3. $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m} \Leftrightarrow \sqrt{a^m} = \left(\sqrt{a}\right)^m$, $a \ge 0$

4. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \Leftrightarrow a = \left(\sqrt{a}\right)^2$, $a \ge 0$

5. $\sqrt{a^2} = |a| \Leftrightarrow |a| = \sqrt{a^2}$

Действия с арифметическими корнями n-й степени

$$\sqrt[nk]{a^{nm}}=\sqrt[k]{a^m} \Leftrightarrow \sqrt[k]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{nm}},\quad k\in N,\quad m\in N \text{ —}$$

основное свойство корня n-й степени

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \Leftrightarrow \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad b\neq 0$

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \Leftrightarrow a=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n,\ a\geq 0$

5. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a| \Leftrightarrow |a|=\sqrt[2n]{a^{2n}}$

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a} \Leftrightarrow \sqrt[nm]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

7. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m b^n} \Leftrightarrow \sqrt[nm]{a^m b^n}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$

8. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}} \Leftrightarrow \sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

Внесение множителя под знак корня

9. $a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b},\ a\geq 0$

10. $a\cdot\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{|a|^n b},\ a<0$

Вынесение множителя из-под знака корня

$(a\geq 0,\ b\geq 0,\ k\geq n,\ k\in N,\ n\in N)$

11. $\sqrt[n]{a^{kn}b}=\left|a^k\right|\sqrt[n]{b},\ n=2m$

12. $\sqrt[n]{a^k b}=\sqrt[n]{a^n\cdot a^{k-n}b}=a\sqrt[n]{a^{k-n}b}$

Освобождение дроби от иррациональности в знаменателе

($\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ — сопряженные выражения)

13. $\dfrac{b}{\sqrt[n]{a^k}}=\dfrac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$, $n>k$; $a>0$

14. $\dfrac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\dfrac{m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}$, $a>0$; $b>0$; $a\neq b$

15. $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\dfrac{m(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a\pm b}$

16. $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ — формула сложного радикала

Решение квадратных уравнений

1. $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, b — нечетное число

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D=b^2-4ac$

2. $ax^2+bx+c=0$, $b=2m$, b — четное число

$x_{1,2}=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}$, $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=m^2-ac$

3. $x^2+px+q=0$, p — четное число

$x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$

4. $x^2+px+q=0$, p — нечетное число

$x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

5. Решение по формулам Виета

$$x^2+px+q=0$$
$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$$

если $x^2+px+q=0$
и $1+p+q=0$,
то $x_1=1$, $x_2=q$

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

если $ax^2+bx+c=0$
и $a+b+c=0$,
то $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$

6. Решение неполных квадратных уравнений

1) $ax^2+bx=0$

$x_1=0$; $x_2=-\frac{b}{a}$

2) $ax^2+c=0$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

3) $ax^2=0$

$x=0$

7. Разложение квадратного трехчлена на множители

x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$$

Решение уравнений и неравенств. Условия равносильности

1. $\sqrt{x^2}=|x|$; $|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\ge 0 \\ -x, \text{ если } x<0 \end{cases}$

2. $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right.$

3. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

4. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

5. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

Если $g(x) < 0$, то решений нет

6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

Если $g(x) < 0$, то $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow x \in D(f)$

7. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

8. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Если $g(x) < 0$, то $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow x \in D(f)$

9. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

Если $g(x) < 0$, то решений нет

10. $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\g(x)>0\end{cases}$

11. $\log_a f(x)<\log_a g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\0<f(x)<g(x)\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\f(x)>g(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

12. $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<a<1\\0<f(x)<g(x)\end{cases}\\\begin{cases}a>1\\f(x)>g(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

Логарифм. Свойства логарифмов

Определение. $\log_a b=n$ — логарифм, если $a^n=b$, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$

1. $a^{\log_a b}=b,\ a>0,\ a\neq1,\ b>0$ — основное логарифмическое тождество

2. $\log_a a=1,\ a>0,\ a\neq1$

3. $\log_a 1=0,\ a>0,\ a\neq1$

4. $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)\Leftrightarrow\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$

   $a>0, a\neq1, b>0, c>0$

5. $\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)\Leftrightarrow\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$

   $a>0, a\neq1, b>0, c>0$

6. $\log_a b^m=m\log_a b\Leftrightarrow m\log_a b=\log_a b^m$

   $a>0, a\neq1, b>0$

7. $\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{m}\log_a b = \log_{a^m} b = \log_a b^{\frac{1}{m}}$

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ m \neq 0$

8. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b \Leftrightarrow \frac{m}{n}\log_a b = \log_{a^n} b^m$

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ n \neq 0$

9. $\log_a \sqrt[m]{b^n} = \frac{n}{m}\log_a b \Leftrightarrow \frac{n}{m}\log_a b = \log_a \sqrt[m]{b^n} = \log_a b^{\frac{n}{m}}$

$b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

10. $\log_a b = \log_{a^m} b^m \Leftrightarrow \log_{a^m} b^m = \log_a b$

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

11. $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b} \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

12. $n = \log_a a^n \Leftrightarrow \log_a a^n = n$

$a > 0,\ a \neq 1$

Переход от одного основания логарифма к другому

$(a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1)$

13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $\quad \lg b = \frac{1}{\log_b 10}$; $\quad \ln b = \frac{1}{\log_b e}$

14. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $\quad \ln b = \frac{\lg b}{\lg e}$; $\quad \lg b = \frac{\ln b}{\ln 10}$

15. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия ($\div(a_n)$)

Определение. $a_{n+1} = a_n + d,\ n \in N$

1. $a_n = a_1 + d(n-1)$, $n \in N$ — формула общего члена

2. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$ — характеристическое свойство

3. $d = a_{n+1} - a_n$ — разность арифметической прогрессии

4. $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$

5. $a_1 = a_n - d(n-1)$

6. $a_n = a_k - d(n-k)$; $k < n,\ n \in N,\ k \in N$

7. $a_n + a_k = a_{n-l} + a_{k+l}$; $n \in N,\ k \in N,\ l \in N$

Формулы суммы $\div(a_n)$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\quad n \in N$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,\quad n \in N$$

Геометрическая прогрессия ($\div\div(b_n)$)

Определение. $b_{n+1} = b_n \cdot q,\ n \in N,\ q \neq 1$

1. $q = b_{n+1} : b_n$ — знаменатель геометрической прогрессии

2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — формула общего члена

3. $b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$; $n \geq 2, n \in N$ — характеристическое свойство

4. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$; $k < n, k \in N, n \in N$

5. $b_n \cdot b_k = b_{n+l} \cdot b_{k-l}$; $k \in N, n \in N, l \in N$

6. $b_1 \cdot b_n = b_1^2 \cdot q^{n-1}$

Формулы суммы ÷ (b_n)

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$$

$$S_n = \frac{b_1}{1-q},$$

где $|q| < 1$ — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Приложение 2

Таблица исследования элементарных функций

Функция $y = f(x)$	Область определения функции $D(f)$	Множество значений функции $E(f)$	Корни $f(x) = 0$	Четность, нечетность $f(-x) = \pm f(x)$	Промежутки знакопостоянства	Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
$y = kx$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x_0 = 0$	$y(-x) = -y(x)$ нечетная	$k > 0$ $y > 0$ при $x > 0$ $y < 0$ при $x < 0$ $k < 0$ $y > 0$ при $x < 0$ $y < 0$ при $x > 0$	$k > 0$ $y = kx\ (\uparrow)$ $k < 0$ $y = kx\ (\downarrow)$	Не обладает	Нет	Да $y = \frac{x}{k}$, $k \neq 0$	Да
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x_0 = -\frac{b}{k}$	$y(-x) \neq \pm y(x)$ не обладает	$k > 0$ $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$ $y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ $k < 0$ $y > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ $y < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$	$k > 0$ $y = kx + b\ (\uparrow)$ $k < 0$ $y = kx + b\ (\downarrow)$	Не обладает	Нет	Да $y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$, $k \neq 0$	Да
$y = ax^2$	$(-\infty; +\infty)$	$a > 0$ $[0; +\infty)$ $a < 0$ $(-\infty; 0]$	$x_0 = 0$	$y(-x) = y(x)$ четная	$a > 0$ $y > 0$ при $x \neq 0$ $a < 0$ $y < 0$ при $x \neq 0$	$a > 0$ $y = ax^2\ (\uparrow)$ при $x \in [0; +\infty)$ $y = ax^2\ (\downarrow)$ при $x \in (-\infty; 0]$ $a < 0$ наоборот	Не обладает	$a > 0$, $y = 0$ — наименьшее $a < 0$, $y = 0$ — наибольшее	$a > 0$ $x \geq 0$ $y = \sqrt{x}$	Да

Таблица исследования

Функция $y=f(x)$	Область определения функции $D(f)$	Множество значений функции $E(f)$	Корни $f(x)=0$	Четность, нечетность $f(-x)=\pm f(x)$
$y=kx$ 	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x_0=0$	$y(-x)=-y(x)$ нечетная
$y=kx+b$ 	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x_0=-\frac{b}{k}$	$y(-x)\neq\pm y(x)$ не обладает
$y=ax^2$ 	$(-\infty; +\infty)$	$a>0$ $[0; +\infty)$ $a<0$ $(-\infty; 0]$	$x_0=0$	$y(-x)=y(x)$ четная

Приложение 2

элементарных функций

Промежутки знакопостоянства	Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
$k>0$ $y>0$ при $x>0$ $y<0$ при $x<0$ $k<0$ $y>0$ при $x<0$ $y<0$ при $x>0$	$k>0$ $y=kx\ (\uparrow)$ $k<0$ $y=kx\ (\downarrow)$	Не обладает	Нет	Да $y=\frac{x}{k}$, $k\neq 0$	Да
$k>0$ $y>0$ при $x>-\frac{b}{k}$ $y<0$ при $x<-\frac{b}{k}$ $k<0$ $y>0$ при $x<-\frac{b}{k}$ $y<0$ при $x>-\frac{b}{k}$	$k>0$ $y=kx+b\ (\uparrow)$ $k<0$ $y=kx+b\ (\downarrow)$	Не обладает	Нет	Да $y=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}$, $k\neq 0$	Да
$a>0$ $y>0$ при $x\neq 0$ $a<0$ $y<0$ при $x\neq 0$	$a>0$ $y=ax^2\ (\uparrow)$ при $x\in[0;+\infty)$ $y=ax^2\ (\downarrow)$ при $x\in(-\infty;0]$ $a<0$ наоборот	Не обладает	$a>0$, $y=0$ — наименьшее $a<0$, $y=0$ — наибольшее	$a>0$ $x\geq 0$ $y=\sqrt{x}$	Да

Функция $y=f(x)$	Область определения функции $D(f)$	Множество значений функции $E(f)$	Корни $f(x)=0$	Четность, нечетность $f(-x)=\pm f(x)$	Промежутки знакопостоянства	Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
$y=ax^2+bx+c$ $a>0$ $a<0$	$(-\infty;+\infty)$	$a>0$ $[y_0;+\infty)$ $a<0$ $(-\infty;y_0]$ $y_0=y\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $D=b^2-4ac$	$y(-x)\ne\pm y(x)$ не обладает	$a>0$ $y>0$ при $x<x_1$ и $x>x_2$ $y<0$ при $x_1<x<x_2$ $a<0$ наоборот	$a>0$ $y=ax^2+bx+c$ (↑) при $x\in\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ $y=ax^2+bx+c$ (↓) при $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ $a<0$ наоборот	Не обладает	$a>0$ $y=f(-\frac{b}{2a})$ — наименьшее $a<0$ $y=f(-\frac{b}{2a})$ — наибольшее	Да, при $x\ge-\frac{b}{2a}$	Да
$y=ax^3$ $a>0$ $a<0$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$x_0=0$	$y(-x)=-y(x)$ нечетная	$a>0$ $y>0$ при $x>0$ $y<0$ при $x<0$ $a<0$ $y>0$ при $x<0$ $y<0$ при $x>0$	$a>0$ $y=ax^3$(↑) $a<0$ $y=ax^3$(↓)	Не обладает	Нет	Да $y=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\cdot x$	Да
$y=\frac{1}{x}$ $a>0$ $a<0$	$(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;+\infty)$	Нет	$y(-x)=-y(x)$ нечетная	$y>0$ при $x>0$ $y<0$ при $x<0$	$y=\frac{1}{x}$ (↓) при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(0;+\infty)$	Не обладает	Нет	Да $y=\frac{1}{x}$	Да на $D(f)$

Функция $y=f(x)$	Область определения функции $D(f)$	Множество значений функции $E(f)$	Корни $f(x)=0$	Четность, нечетность $f(-x)=\pm f(x)$
$y=ax^2+bx+c$ y, $a>0$, x_1, 0, x_2, x, $a<0$	$(-\infty;+\infty)$	$a>0$ $[y_0;+\infty)$ $a<0$ $(-\infty;y_0]$ $y_0=y\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $D=b^2-4ac$	$y(-x)\neq\pm y(x)$ не обладает
$y=ax^3$ y, $a>0$, 0, x, $a<0$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$x_0=0$	$y(-x)=-y(x)$ нечетная
$y=\frac{1}{x}$ y, $a>0$, 0, x, $a<0$	$(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;+\infty)$	Нет	$y(-x)=-y(x)$ нечетная

Промежутки знакопостоянства	Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
$a>0$ $y>0$ при $x<x_1$ и $x>x_2$ $y<0$ при $x_1<x<x_2$ $a<0$ наоборот	$a>0$ $y=ax^2+bx+c$ $(\uparrow)$ при $x\in\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ $y=ax^2+bx+c$ $(\downarrow)$ при $x\in\left[-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$ $a<0$ наоборот	Не обладает	$a>0$ $y=f(-\frac{b}{2a})$ — наименьшее $a<0$ $y=f(-\frac{b}{2a})$ — наибольшее	Да, при $x\geq-\frac{b}{2a}$	Да
$a>0$ $y>0$ при $x>0$ $y<0$ при $x<0$ $a<0$ $y>0$ при $x<0$ $y<0$ при $x>0$	$a>0$ $y=ax^3(\uparrow)$ $a<0$ $y=ax^3(\downarrow)$	Не обладает	Нет	Да $y=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\cdot x$	Да
$y>0$ при $x>0$ $y<0$ при $x<0$	$y=\frac{1}{x}$ $(\downarrow)$ при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(0;+\infty)$	Не обладает	Нет	Да $y=\frac{1}{x}$	Да на $D(f)$

Функция $y = f(x)$	Область определения функции $D(f)$	Множество значений функции $E(f)$	Корни $f(x) = 0$	Четность, нечетность $f(-x) = \pm f(x)$
$y = a^x$ $a > 0$ $a > 1$ $0 < a < 1$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Нет	$y(-x) \neq \pm y(x)$ не обладает
$y = \log_a x$ $a > 1$ $0 < a < 1$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x_0 = 1$	Не обладает $D(f)$ не симметричная

Промежутки знакопостоянства	Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
$y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$	$a > 1$ $y = a^x (\uparrow)$ $0 < a < 1$ $y = a^x (\downarrow)$	Не обладает	Нет	$y = \log_a x$	Да
$a > 1$ $y > 0$ при $x > 1$ $y < 0$ при $0 < x < 1$ $0 < a < 1$ $y > 0$ при $0 < x < 1$ $y < 0$ при $x > 1$	$a > 1$ $y = \log_a x (\uparrow)$ $0 < a < 1$ $y = \log_a x (\downarrow)$	Не обладает	Нет	$y = a^x$	Да

Функция $y = f(x)$	Область определения функции $D(f)$	Множество значений функции $E(f)$	Корни $f(x) = 0$	Четность, нечетность $f(-x) = \pm f(x)$
$y = a^x$ $a > 0$ y, 1, o, x, $a > 1$, $0 < a < 1$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Нет	$y(-x) \neq \pm y(x)$ не обладает
$y = \log_a x$ y, o, 1, x, $a > 1$, $0 < a < 1$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x_0 = 1$	Не обладает $D(f)$ не симметричная

Промежутки знакопостоянства	Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
$y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$	$a > 1$ $y = a^x (\uparrow)$ $0 < a < 1$ $y = a^x (\downarrow)$	Не обладает	Нет	$y = \log_a x$	Да
$a > 1$ $y > 0$ при $x > 1$ $y < 0$ при $0 < x < 1$ $0 < a < 1$ $y > 0$ при $0 < x < 1$ $y < 0$ при $x > 1$	$a > 1$ $y = \log_a x (\uparrow)$ $0 < a < 1$ $y = \log_a x (\downarrow)$	Не обладает	Нет	$y = a^x$	Да

Приложение 3

Тригонометрия

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2. $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

3. $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

4. $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

5. $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

6. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$

7. $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$

8. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$

9. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$

10. $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$

11. $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha,\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$

12. $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha,\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$

13. $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

14. $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha,\ \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$

15. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

16. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$

Формулы суммы и разности углов

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
5. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},\ \alpha,\ \beta,\ (\alpha+\beta) \neq \frac{\pi}{2}(1+2k),\ k \in Z$
6. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},\ \alpha,\ \beta,\ (\alpha-\beta) \neq \frac{\pi}{2}(1+2k),\ k \in Z$
7. $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta},\ \alpha,\ \beta,\ (\alpha+\beta) \neq \pi k,\ k \in Z$
8. $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta},\ \alpha,\ \beta,\ (\alpha+\beta) \neq \pi k,\ k \in Z$

Формулы двойных углов

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
5. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$
6. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$

Формулы тройных углов

1. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

2. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

3. $\cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$

4. $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$

5. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Формулы половинных углов

1. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$

2. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

3. $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

4. $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

5. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

6. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

7. $\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

8. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$

9. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

5. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, $\alpha, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

6. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, $\alpha, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

7. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, $\alpha, \beta \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

8. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, $\alpha, \beta \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

9. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

10. $\sin\alpha - \cos\alpha = \pm\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

1. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
2. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
3. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$

Тождества, связанные с обратными функциями

1. $\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1;1]$
2. $\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1;1]$
3. $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x,\ x \in (-\infty;+\infty)$
4. $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x,\ x \in (-\infty;+\infty)$
5. $\arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
6. $\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0;\pi]$
7. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
8. $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x,\ x \in (0;\pi)$
9. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
10. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
11. $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$
12. $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$
13. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1;1]$
14. $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2},\ x \in (-\infty;+\infty)$
15. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (0;1)$

16. $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in (0;1)$

17. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in (0;+\infty)$

18. $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in (0;+\infty)$

Таблица значений тригонометрических функций основных углов

arc α	0 2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$n°$	360° 0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
ctg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞
sec α	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	∞	1
cosec α	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞

Исследование элементарных функций

Свойства / Функция $y = f(x)$	1 $D(f)$ ООФ x	2 $E(f)$ ОЗФ y	3 Корни $f(x) = 0$	4 Четность, нечетность $f(-x) = \pm f(x)$	5 Промежутки знакопостоянства
$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1;1]$	$x_0 = \pi k$, $k \in Z$	$\sin(-x) = -\sin x$ нечетная	$y > 0$ при x $(0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$ $y < 0$ при x $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1;1]$	$x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	$\cos(-x) = \cos x$ четная	$y > 0$ при x $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ $y < 0$ при x $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right)$, $k \in Z$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$(-\infty; +\infty)$ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	$(-\infty; +\infty)$	$x_0 = \pi k$, $k \in Z$	$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ нечетная	$y > 0$ при x $\left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $y < 0$ при x $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, 0 + \pi k\right)$, $k \in Z$
$y = \arcsin x$	$[-1;1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$x_0 = 0$	$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ нечетная	$y > 0$ при $x(0;1)$ $y < 0$ при $x(-1;0)$

Функция $y = f(x)$	6 Монотонность	7 Периодичность	8 Наибольш. Наименьш.	9 Обратимость	10 Непрерывность
$y = \sin x$	$y = \sin x$ (↑) на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ $y = \sin x$ (↓) на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$, $k \in Z$	Да $T = 2\pi$ наименьший	$y = 1$ наибольшее $y = -1$ наименьшее	$y = \arcsin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Да
$y = \cos x$	$y = \cos x$ (↑) на $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$ $y = \cos x$ (↓) на $[0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$	Да $T = 2\pi$	$y = 1$ наибольшее $y = -1$ наименьшее	$y = \arccos x$ на $[0; \pi]$	Да
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{tg}\, x$ (↑) на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$	Да $T = \pi$	Нет	$y = \mathrm{arctg}\, x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Да, на $D(f)$
$y = \arcsin x$	$y = \arcsin x$ (↑) при $x[-1;1]$	Не обладает	$y = \frac{\pi}{2}$ наибольшее $y = -\frac{\pi}{2}$ наименьшее	$y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Да

Исследование

Свойства	1	2	3	4	5
Функция $y = f(x)$	$D(f)$ – ООФ x	$E(f)$ – ОЗФ y	Корни $f(x) = 0$	Четность, нечетность $f(-x) = \pm f(x)$	Промежутки знакопостоянства
$y = \sin x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$	$x_0 = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$	$\sin(-x) = -\sin x$ нечетная	$y > 0$ при x $(0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$ $y < 0$ при x $(\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$
$y = \cos x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$	$x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$	$\cos(-x) = \cos x$ четная	$y > 0$ при x $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ $y < 0$ при x $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
$y = \operatorname{tg} x$	$(-\infty;+\infty)$ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$	$(-\infty;+\infty)$	$x_0 = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ нечетная	$y > 0$ при x $\left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $y < 0$ при x $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; 0 + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
$y = \arcsin x$	$[-1;1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$x_0 = 0$	$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ нечетная	$y > 0$ при $x (0;1)$ $y < 0$ при $x (-1;0)$

элементарных функций

6	7	8	9	10
Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
$y=\sin x$ (↑) на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ $y=\sin x$ (↓) на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right]$, $k\in \mathbf{Z}$	Да $T=2\pi$ наименьший	$y=1$ наибольшее $y=-1$ наименьшее	$y=\arcsin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Да
$y=\cos x$ (↑) на $[\pi+2\pi k; 2\pi+2\pi k]$ $y=\cos x$ (↓) на $[0+2\pi k; \pi+2\pi k]$, $k\in \mathbf{Z}$	Да $T=2\pi$	$y=1$ наибольшее $y=-1$ наименьшее	$y=\arccos x$ на $[0;\pi]$	Да
$y=\operatorname{tg} x$ (↑) на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in \mathbf{Z}$	Да $T=\pi$	Нет	$y=\operatorname{arctg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Да, на $D(f)$
$y=\arcsin x$ (↑) при $x[-1;1]$	Не обладает	$y=\frac{\pi}{2}$ наибольшее $y=-\frac{\pi}{2}$ наименьшее	$y=\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Да

Свойства / Функция $y = f(x)$	1 $D(f)$ ООФ x	2 $E(f)$ ОЗФ y	3 Корни $f(x) = 0$	4 Четность, нечетность $f(-x) = \pm f(x)$	5 Промежутки знакопостоянства	6 Монотонность	7 Периодичность	8 Наибольш Наименьш	9 Обратимость	10 Непрерывность
$y = \arccos x$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$	$x_0 = 1$	$y(-x) \neq \pm y(x)$ не обладает	$y \geq 0$ при $-1 \leq x \leq 1$	Убывает	Не обладает	$y = \pi$ наибольшее; $y = 0$ наименьшее	$y = \cos x$	Да
$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$x_0 = 0$	$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ нечетная	$y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$	$y = \operatorname{arctg} x$ (↑) при $x \in (-\infty;+\infty)$	Не обладает	Нет	$y = \operatorname{tg} x$	Да
$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$(0;\pi)$	Нет	$y(-x) \neq \pm y(x)$ не обладает	$0 < y < \pi$ при $x \in R$	Убывает	Не обладает	Нет	$y = \operatorname{ctg} x$	Да

Решение простейших тригонометрических уравнений

1. $\sin x = a;\ |a| < 1$
   1) $a > 0;\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
   2) $a < 0;\ x = (-1)^{k+1} \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
2. $\cos x = a;\ |a| < 1$
   1) $a > 0;\ x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$
   2) $a < 0;\ x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi k,\ k \in Z$
3. $\operatorname{tg} x = a;\ a \in R$
   1) $a > 0;\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$
   2) $a < 0;\ x = -\operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$
4. $\operatorname{ctg} x = a;\ a \in R$
   1) $a > 0;\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z$
   2) $a < 0;\ x = \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z$

Свойства	1	2	3	4	5
Функция $y = f(x)$	$D(f)$ – ООФ x	$E(f)$ – ОЗФ y	Корни $f(x) = 0$	Четность, нечетность $f(-x) = \pm f(x)$	Промежутки знакопостоянства
$y = \arccos x$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$	$x_0 = 1$	$y(-x) \neq \pm y(x)$ не обладает	$y \geq 0$ при $-1 \leq x \leq 1$
$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$x_0 = 0$	$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ нечетная	$y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$(0;\pi)$	Нет	$y(-x) \neq \pm y(x)$ не обладает	$0 < y < \pi$ при $x \in R$

Решение простейших

1. $\sin x = a; |a| < 1$
   1) $a > 0;\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
   2) $a < 0;\ x = (-1)^{k+1} \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
2. $\cos x = a; |a| < 1$
   1) $a > 0;\ x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$
   2) $a < 0;\ x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi k,\ k \in Z$

6	7	8	9	10
Монотонность	Периодичность	Наибольш. Наименьш.	Обратимость	Непрерывность
Убывает	Не обладает	$y = \pi$ наибольшее $y = 0$ наименьшее	$y = \cos x$	Да
$y = \text{arctg} x$ (↑) при $x (-\infty; +\infty)$	Не обладает	Нет	$y = \text{tg}\, x$	Да
Убывает	Не обладает	Нет	$y = \text{ctg}\, x$	Да

тригонометрических уравнений

3. $\text{tg}\, x = a$; $a \in R$
   1) $a > 0$; $x = \text{arctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$
   2) $a < 0$; $x = -\text{arctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$
4. $\text{ctg}\, x = a$; $a \in R$
   1) $a > 0$; $x = \text{arcctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$
   2) $a < 0$; $x = \pi - \text{arcctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$

Приложение 4

Производная

1. *Определение:* $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

2. Механический смысл производной:
$f'(x)=v_t$ — мгновенная скорость изменения функции.

3. Геометрический смысл производной:

$f'(x_0)=k_{\text{касательной}}=\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox.

Уравнение касательной:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, где $(x_0;f(x_0))$ — точка касания.

x_0 — стационарная точка, если $f'(x_0)=0$

x_0 — внутренняя точка $D(f)$

x_0 — точка максимума, если $f'(x)$ меняет знак с «+» на «−» при переходе через точку x_0

x_0 — точка минимума, если $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+» при переходе через точку x_0

Формулы производных функций на $D(f)$

1. $(c)'=0$
2. $(x)'=1$
3. $(kx)'=k$
4. $(kx+b)'=k$
5. $\left(\dfrac{kx+b}{c}\right)'=\dfrac{k}{c}$
6. $(x^2)'=2x$
7. $(x^n)'=nx^{n-1}$
8. $(kx^n)'=knx^{n-1}$
9. $\left(\dfrac{x^n}{c}\right)'=\dfrac{n}{c}x^{n-1}$
10. $((kx+b)^n)'=kn(kx+b)^{n-1}$
11. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

$\left(\dfrac{1}{kx+b}\right)'=-\dfrac{k}{(kx+b)^2}$

12. $\left(\dfrac{c}{x}\right)' = -\dfrac{c}{x^2}$

13. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $(\sqrt{kx+b})' = \dfrac{k}{2\sqrt{kx+b}}$

14. $(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

15. $(\sqrt[n]{x^m})' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

16. $(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$

17. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

18. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u$, где $u = f(x)$, $v = g(x)$ — дифференцируемые функции

19. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}$, $v = g(x) \neq 0$

20. $(\sin x)' = \cos x$; $(\sin(kx+b))' = k\cos(kx+b)$

21. $(\cos x)' = -\sin x$; $(\cos(kx+b))' = -k\sin(kx+b)$

22. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{tg}(kx+b))' = \dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$

23. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $(\operatorname{ctg}(kx+b))' = -\dfrac{k}{\sin^2(kx+b)}$

24. $(e^x)' = e^x$; $(e^{kx+b})' = k\cdot e^{kx+b}$

25. $(a^x)' = a^x \ln a$; $(a^{kx+b})' = k\cdot a^{kx+b}\ln a$

26. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$; $(\ln(kx+b))' = \dfrac{k}{kx+b}$, $kx+b > 0$

27. $(\lg x)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$, $x > 0$

28. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $x > 0$; $(\log_a (kx+b))' = \frac{k}{(kx+b)\ln a}$; $kx+b>0$

29. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$

30. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$

31. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

32. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Формулы производных сложных функций

Если $u=f(x)$ и $v=g(x)$ дифференцируемые, то $(v(u(x)))' = v'(u)\cdot u'(x)$ — общая формула.

1. $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
2. $(e^u)' = e^u\cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u\cdot u'\cdot \ln a$
4. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
5. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}$
6. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
7. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$
8. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$
9. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

Если $u=kx+b$, то примените формулы для $f(kx+b)$.

Приложение 5

Первообразная, интеграл

Формулы нахождения первообразных $F(x)+C$, или неопределенных интегралов $\int f(x)dx = F(x)+C$

$\int f(x)dx$	$f(x)$	$F(x)$
1. $\int dx = x + C$	1	$x+C$
2. $\int kdx = kx + C$	k	$kx+C$
3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$	x	$\frac{x^2}{2}+C$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
5. $\int kx^n dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,\ n \in R$	kx^n	$\frac{kx^{n+1}}{n+1}+C$
6. $\int f(kx+b)^n dx = \frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)} + C,$ $n \neq -1,\ k \neq 0$	$(kx+b)^n$	$\frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)}+C$
7. $\int \frac{x^n}{k} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,\ k \neq 0$	$\frac{x^n}{k}$	$\frac{x^{n+1}}{k(n+1)}+C$
8. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,\ x > 0$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,\ x > 0$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
10. $\int \sqrt{kx+b}\, dx = \frac{2}{3k}\sqrt{(kx+b)^3} + C,\ x > -\frac{b}{k}$	$\sqrt{kx+b}$	$\frac{2}{3k}\sqrt{(kx+b)^3}+C$

$\int f(x)dx$	$f(x)$	$F(x)$
11. $\int e^x dx = e^x + C$	e^x	$e^x + C$
12. $\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C,\ k \neq 0$	e^{kx+b}	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
14. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C,\ x \neq 0$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
15. $\int \frac{1}{kx+b} dx = \frac{1}{k} \ln\|kx+b\| + C,\ x \neq -\frac{b}{k}$	$\frac{1}{kx+b}$	$\frac{1}{k} \ln\|kx+b\| + C$
16. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
17. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
20. $\int \sin(kx+b) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$	$\sin(kx+b)$	$-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$
21. $\int \cos(kx+b) dx = \frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$	$\cos(kx+b)$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$
22. $\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k} \operatorname{tg}(kx+b) + C,$ $kx+b \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\frac{1}{\cos^2(kx+b)}$	$\frac{1}{k} \operatorname{tg}(kx+b) + C$
23. $\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg}(kx+b) + C,$ $kx+b \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\frac{1}{\sin^2(kx+b)}$	$-\frac{1}{k} \operatorname{ctg}(kx+b) + C$

$\int f(x)dx$	$f(x)$	$F(x)$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \ -1 < x < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
25. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$

Формула площади криволинейной трапеции

$$S_{\text{фигуры}} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F(x) \text{ – первообразная}$$

Формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Свойства определенного интеграла

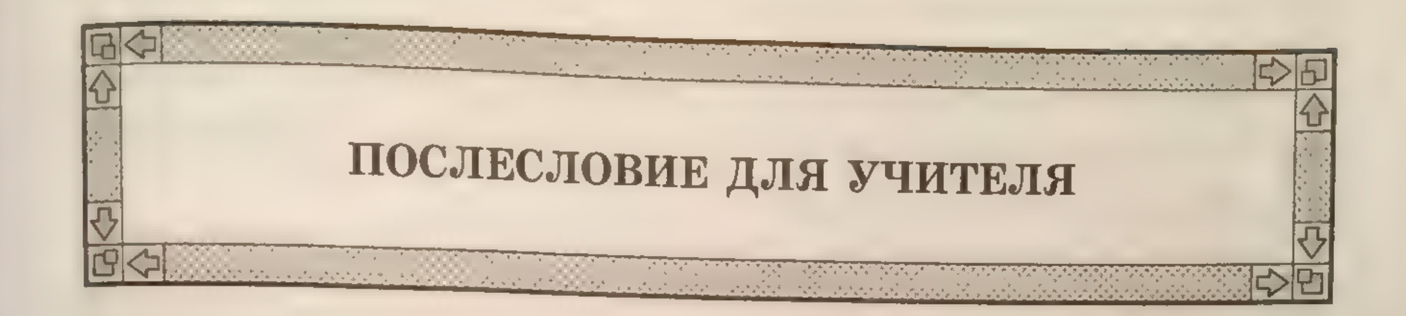
1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
3. $\int_a^b mf(x)dx = m\int_a^b f(x)dx$, m — постоянная
4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

СПИСОК АЛГОРИТМОВ

Часть I

СПИСОК АЛГОРИТМОВ

Часть II



ПОСЛЕСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Уважаемые коллеги!

Основная идея предлагаемого пособия состоит в алгоритмизации процесса обучения математике школьного курса.

Для решения стандартной математической задачи — уравнения, неравенства, их систем, исследования функций, построения графиков и т. д. — можно разработать алгоритмы. Алгоритм в данном случае выступает как средство освоения содержания школьного математического образования. Следуя алгоритмическому предписанию, учащиеся смогут выполнить не только исполнительские, но и ориентировочные действия, что обеспечит такие качества учебной деятельности, как понимание решения задачи и разумность выполняемых действий.

В книге даны направляющие алгоритмы, не привязывающие ученика к строго определенным рамкам, дающие возможность творческого выполнения операций. Умелое и осознанное владение алгоритмом обеспечит учащимся переход с репродуктивной учебной деятельности на продуктивную (творческую) и даст возможность успешно решать более сложные задачи и применять полученные знания в новых нетрадиционных (неалгоритмических) ситуациях.

Это пособие для самообразования адресовано учащимся старших классов, в том числе тем, кто имеет значительные пробелы в знаниях по математике. В этой связи ряд теоретических положений сформулирован в несколько упрощенном виде. Формулировки определений, математических понятий адаптированы к восприятию теми учащимися, которые испытывают неуверенность в своих силах и возможно-

стях, чей неудачный в прошлом опыт становится психологической преградой на пути успешного освоения учебного материала. Учитывая практическую направленность предлагаемого пособия, считаю вполне допустимой подобную адаптацию.

При обучении математике учитель сталкивается с несколькими трудностями:

во-первых, с непониманием учащимися определений основных понятий, а непонятное невозможно усвоить и применить;

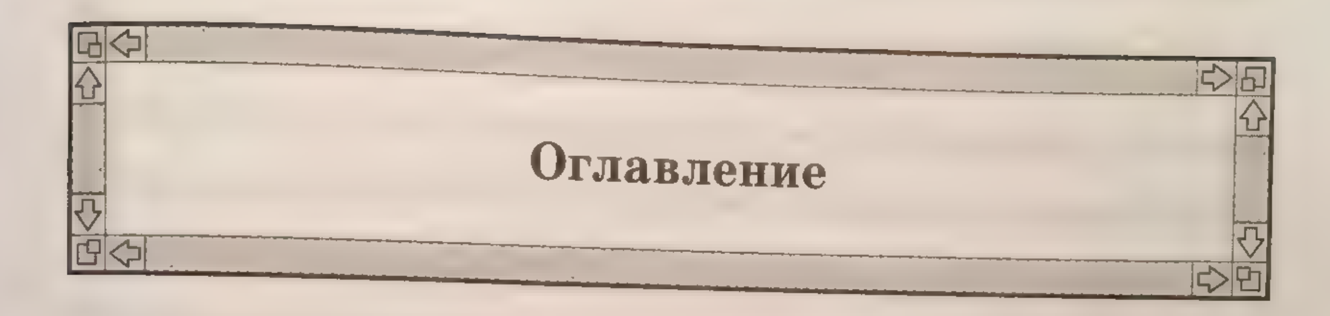
во-вторых, с нежеланием учащихся знать формулы, с неумением отыскивать их в таблице (из-за незнания метода аналогии) и применять на практике;

в-третьих, с незнанием учащимися основных алгоритмов решения задач. Учащиеся не знают, с чего начать решение и какова последовательность выполнения операций. Вместе с тем необходимым условием развития логического мышления является уверенное владение учащимися определенными алгоритмами решения стандартных математических задач как базы дальнейших знаний;

в-четвертых, с неумением учащихся оформить решение задачи математически грамотно, обосновать теоретически свое решение.

Преодолению этих трудностей при изучении математики и посвящена эта книга.

С уважением
Автор



Оглавление

ЧАСТЬ I

ЧАСТЬ II

Издательский Дом «Литера»
приглашает к сотрудничеству авторов
Телефоны редакции: (812) 560-8684, 325-4741
E-mail: publish@litera.spb.ru
http://litera.spb.ru

По вопросам реализации обращаться:
(812) 441-3649, 441-3650
E-mail: sales@litera.spb.ru

Михайлова Жанна Николаевна

Алгоритмы — ключ к решению задач
АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
10—11 классы

Редакторы *И. Жуковская, М. Филичева*
Обложка *В. Финогенов*
Корректоры *И. Астрова, М. Селиванова*
Верстка *М. Владимиров, О. Пугачева*

12+

Подписано в печать 25.06.20. Формат $70 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура SchoolBook. Усл. печ. л. 42,12. Тираж 2000 экз. Заказ № 2030.

ООО «Издательский Дом „Литера“»
Россия, 192131, Санкт-Петербург, Ивановская ул., 24 лит. А

Отпечатано в филиале
«Тверской полиграфический комбинат детской литературы»
АО «Издательство „Высшая школа“»
Россия, 170040, Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51

ЕАС



книга-репетитор

Алгоритмы —
ключ к решению задач



Михайлова Жанна Николаевна — учитель высшей категории, методист, Отличник народного просвещения. Является автором эффективной методики обучения математике через алгоритмизацию базового учебного материала и работу с формулами.

Математика. **5–6** классы

Алгебра. **7–9** классы

Геометрия. **7–9** классы

Алгебра и элементарные функции. Начала математического анализа. **10–11** классы

Учебные пособия дают возможность каждому ученику освоить школьную программу самостоятельно, без репетитора!

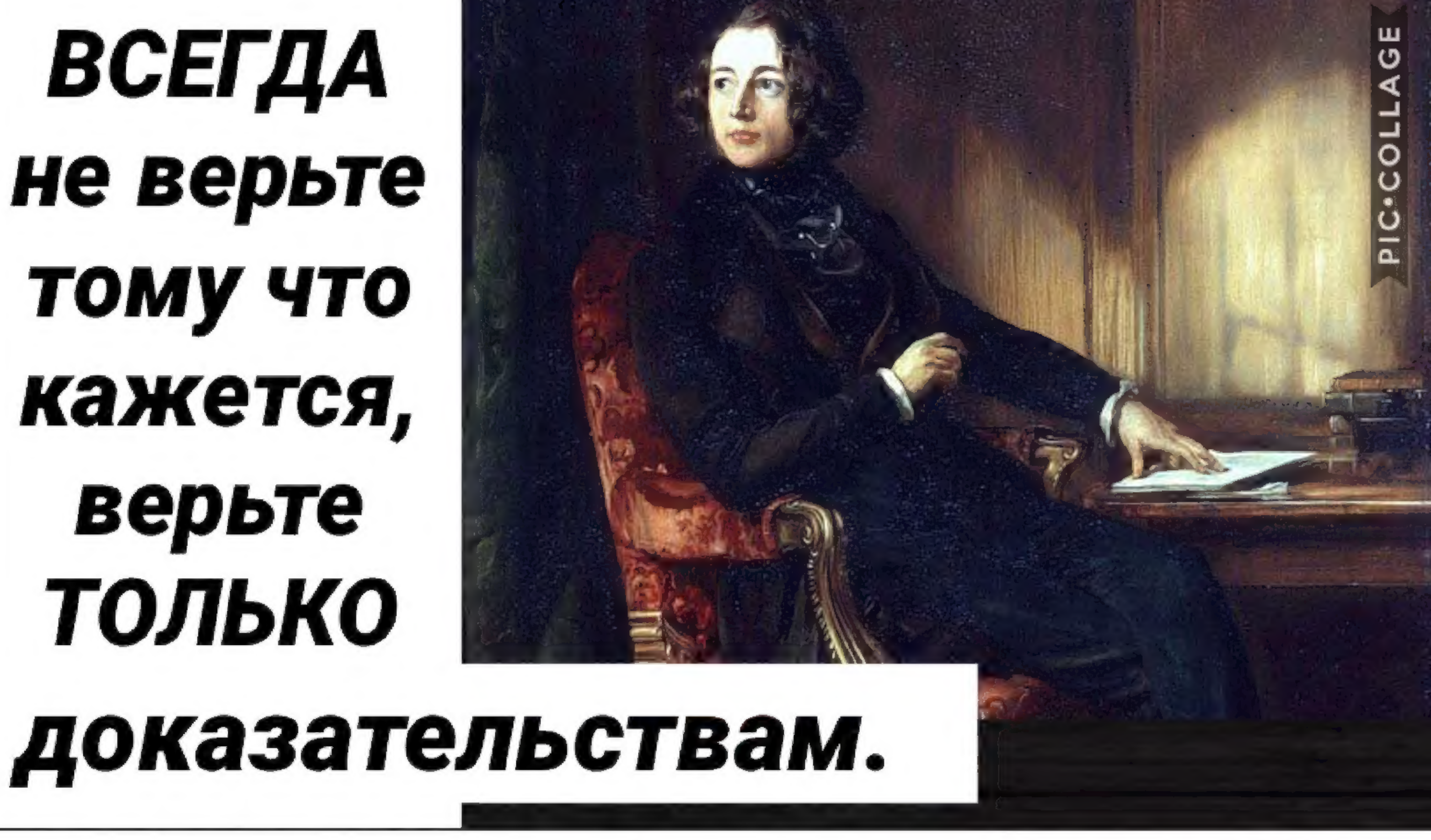
litera.spb.ru



10–11
классы

Алгоритмы — ключ к решению задач

Алгебра и элементарные функции
Начала математического анализа



Чарльз Диккенс. «Большие надежды» 1861 г.